Ueber das Flächennetz 2. Ordnung und seine korrelative Beziehung auf einen Strahlenbündel.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der hohen

philosophischen Fakultät der Kgl. Universität Breslau

vorgelegt

und mit ihrer Genehmigung veröffentlicht

von

Nelly Neumann.

Sonnabend, den 20. November 1909, mittags 12½ Uhr

im Musiksaale der Universität

Vortrag:

„Ueber die Euklidische Proportionslehre und neuere an sie anschliessende Untersuchungen“

und

Promotion.

Breslau
Buchdruckerei H. Fleischmann
1909.

Gedruckt mit Genehmigung der hohen philosophischen Fakultät der Königl. Universität Breslau.

Referent: Geh.-Rat Prof. Dr. **Sturm**.

Termin der mündlichen Prüfung: 14. Juli 1909.

Herrn Geheimrat Sturm

in Hochachtung und herzlicher Dankbarkeit.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548214_0049

Inhaltsübersicht.

1. Einleitung: Der Begriff der Korrelation und die mit der gegebenen Korrelation zwischen einem Flächennetze 2. Ordnung und einem Strahlenbündel verknüpfte zwischen dem zugehörigen Netz von Grundkurven 4. Ordnung und dem zugehörigen Ebenenbündel.

Erster Teil.

Oerter von Strahlen und Ebenen im Bündel, deren entsprechende Elemente im Netz einer gegebenen einfachen Bedingung unterliegen.

I.

Die Strahlenörter.

2. Der Ort der Strahlen, deren entsprechende Flächen eine gegebene Gerade berühren.
3. Der Ort der Strahlen, deren entsprechende Flächen eine gegebene Ebene berühren.
4. Der Ort der Strahlen, deren entsprechende Flächen Kegel sind.
5. „ „ „ „ , die ihre entsprechenden Flächen berühren.
6. Gemeinsame Strahlen je zweier dieser Oerter und ihre entsprechenden Flächen.

II.

Die Ebenenörter.

7. Der Ort der Ebenen, deren entsprechende Grundkurven eine gegebene Gerade treffen.
8. Der Ort der Ebenen, deren entsprechende Grundkurven eine gegebene Ebene berühren.
9. Der Ort der Ebenen, deren entsprechende Grundkurven einen Doppelpunkt haben.
10. Der Ort der Ebenen, die ihre entsprechenden Grundkurven berühren.
11. Gemeinsame Ebenen je zweier dieser Oerter und ihre entsprechenden Grundkurven.

III.

Genauere Betrachtung der in 2.—11. betrachteten Oerter.

12. a) Der Ort der Strahlen, deren entsprechende Flächen eine Gerade g berühren, zugleich als Ort der Ebenen, deren entsprechende Grundkurven g treffen.

b) Ausartung dieses Orts für spezielle Lagen der Geraden.
   α) g liegt auf einer Fläche des Netzes.
   β) g geht durch einen Grundpunkt P_i des Netzes.
   γ) g ist Verbindungslinie zweier Grundpunkte.

13. a) Der Ort der Strahlen, deren entsprechende Flächen eine Ebene ε berühren, zugleich als Ort der Ebenen, deren entsprechende Grundkurven ε berühren.
   b) Ausartung dieses Orts für spezielle Lagen der Ebene.
   α) ε ist Tangentialebene eines Kegels des Netzes.
   β) ε ist gemeinsame Tangentialebene zweier Kegel des Netzes.
   γ) ε geht durch einen Grundpunkt.
   δ) ε geht durch zwei Grundpunkte.
   ε) ε geht durch drei Grundpunkte.

14. a) Der Ort der Strahlen, deren entsprechende Flächen Kegel sind, zugleich als Ort der Ebenen, deren entsprechende Grundkurven einen Doppelpunkt besitzen.
   b) Ausgezeichnete Elemente dieses Ortes.

15. a) Der in 5. behandelte Ort als Tangentialebenengebilde.
   b) Ausgezeichnete Elemente dieses Orts.

16. Ausgezeichnete Elemente des in 10. behandelten Ortes.
   a) Die Wendetangentialebenen.
   α) Die Bündelkorrespondenz [12,9], in der zwei Ebenen einander entsprechen, deren eine die zugeordnete Grundkurve der andern osculiert.
   β) Die Kurve R^{40} der gemeinsamen Punkte von Grundkurven einer festen Fläche $\overline{F}^2$ mit Ebenen eines Büschels g, welche sie berühren.
   γ) Die von den Jacobischen Kurven der Kegelschnittnetze in den Ebenen eines Büschels gebildete Fläche F^4.
   δ) Die beiden Bestandteile der R^{40} und ihre gemeinsamen Punkte.
   ε) Die Fläche F^8, deren einhüllende Ebenen Grundkurven des Netzes doppelt berühren.
   ζ) Die Fläche F^{18}, welche umhüllt wird von den Osculationsebenen der Grundkurven eines gegebenen Grundkurvenbüschels, und der Grad der in α) erwähnten Bündelkorrespondenz.
   η) Die Zahl 39 der Wendetangentialebenen.
   b) Die Doppeltangentialebenen und die übrigen Zahlen des Kegels.

IV.

Die Systeme, welche die in 12. und 13. behandelten Oerter erfüllen, wenn die gegebene Gerade oder Ebene einen Büschel durchläuft.

17. Das zu 12. gehörige System.
18. Das zu 13. gehörige System.

Zweiter Teil.

Die durch die Schnittpunkte entsprechender Strahlen und Flächen oder, was dasselbe ist, entsprechender Ebenen und Grundkurven im Bündel und im Netz erzeugte Fläche und die auf ihr gelegenen Raumkurven, die entstehen, wenn die erzeugenden Elemente einen der im Vorangehenden behandelten Oerter durchlaufen.

I.

Die Fläche.

19. Ableitung ihrer Ordnungszahl.

II.

Die Raumkurven.

20. Allgemeine Betrachtung der Raumkurven.
    a) Die im Anschluss an die Strahlenörter sich ergebenden Kurven.
    b) „ „ „ „ „ Ebenenörter „ „ „
21. Besondere Behandlung der Kurve der Berührungspunkte von Ebenen des Bündels, welche ihre entsprechenden Grundkurven berühren, mit diesen, und der Kurve der weiteren Schnittpunkte dieser Elemente.
    a) Die Kurve der Berührungspunkte R_b.
        α) Die Regelfläche der Grundkurventangenten, welche einen ihrer beiden Berührungspunkte auf der Schnittkurve C^3_ε der erzeugten Fläche F^3 mit einer Ebene ε haben. Eindeutige Beziehung der Geraden dieser Regelfläche auf die Ebenen, für welche ein erzeugender Punkt von F^3 auf C^3_ε fällt. Zurückführung der Ordnung von R_b auf die Zahl der inzidenten entsprechenden Elemente.
        β) Klasse des von den eben erwähnten Ebenen gebildeten Kegels.
        γ) Komplex aller Grundkurventangenten und Kongruenz derjenigen unter ihnen, welche eine Gerade g treffen.
        δ) Die Fläche F^4 der Berührungspunkte auf Grundkurventangenten, welche eine Gerade treffen.
        ε) Die Regelfläche $\mathfrak{R}^4$ der Grundkurventangenten, die einen ihrer beiden Berührungspunkte auf einer Geraden g haben.
        ξ) Die Kurve R^{10} der Berührungspunkte auf Grundkurventangenten, welche zwei Geraden treffen.
        η) Die von diesen Tangenten gebildete Regelfläche $\mathfrak{R}^6$.
        ϑ) Die Regelfläche $\mathfrak{R}^{10}$ der Grundkurventangenten, welche eine Gerade g treffen und einen ihrer beiden Berührungspunkte in ε haben.
        ι) Ihre Schnittkurve mit ε und Ordnung der Regelfläche $\mathfrak{R}^{12}$, deren erzeugende Grundkurventangenten einen ihrer beiden Berührungspunkte auf C^3_ε haben.

κ) Die Kurve R^7 der Berührungspunkte auf allen Grundkurventangenten durch einen Punkt; die Kongruenz (7,3) der Grundkurventangenten, welche einen ihrer beiden Berührungspunkte in ε haben; g als 7-fache Leitgerade der in ι) behandelten Regelfläche.

λ) Die der Kongruenz (7,3) und dem Komplex der Geraden, welche C^3_ε treffen, gemeinsame Regelfläche und Bestätigung der Ordnungszahl der in ι) behandelten Regelfläche.

μ) Ordnung der R_b.

ν) Verhalten der R_b zu den Grundpunkten und Bestätigung ihrer Ordnungszahl.

ο) Gemeinsame Punkte der R_b und der Kegelspitzenkurve des Netzes.

π) Die Regelfläche $\mathfrak{R}^{26}$ der Grundkurventangenten, welche einen ihrer beiden Berührungspunkte auf R_b haben.

ρ) Die Kongruenz der Tangenten, welche die Grundkurven eines gegebenen Büschels berühren, die Bedeutung des Bündelscheitels S auf der in π) behandelten Regelfläche und Bestätigung ihrer Ordnungszahl.

b) Die Kurve R^{54} der weiteren Schnittpunkte und gemeinsame Punkte der R_b und R^{54}.

c) Verhalten der 27 Geraden und der Kegelschnitte auf der F^3 zu R_b und R^{54}.

d) Die R_b als volle Schnittkurve der F^3 mit einer F^5.

1. Unter Korrelation zwischen zwei zweistufigen Gebilden verstehen wir die eineindeutige Zuordnung ihrer Elemente, sofern diese verschiedenartig sind, bei der linearer Bewegung im einen Gebilde lineare Bewegung im anderen entspricht.

Liegt eine Korrelation zwischen einem Strahlenbündel S und einem Netz N von Flächen zweiter Ordnung F^2 vor, so ist also jeder Ebene σ von S ein Büschel $\mathfrak{B}_\sigma$ von F^2 in N zugeordnet, und umgekehrt. Dies führt zu einer eineindeutigen Verwandtschaft des Ebenenbündels S und der zweifachen Mannigfaltigkeit von Büschelgrundkurven R^4 in N; und zwar handelt es sich hierbei wieder um eine Korrelation; denn beschreibt eine Ebene σ von S einen Büschel s, so muss die R^4_σ für jede Lage von σ die allen Strahlen von σ entsprechenden F^2 enthalten. Alle diese R^4_σ verlaufen also auf der der Axe s des Büschels zugeordneten F^2, der F^2_s.

Bewegt sich also eine Ebene von S *in einem Büschel, so bewegt sich die entsprechende* R^4 *auf einer* F^2 *von* N, *der der Axe entsprechenden.*

Hiermit ist die Eigenschaft der Korrelation bewiesen.

Erster Teil.

Oerter von Strahlen und Ebenen im Bündel, deren entsprechende Elemente im Netz einer gegebenen einfachen Bedingung unterliegen.

I.

Die Strahlenörter.

Es ist nun von Interesse, nach den Oertern von Strahlen s oder Ebenen σ in S zu fragen, deren entsprechende F^2 bezw. R^4 in N gewissen einfachen Bedingungen unterworfen sind.

Wir fragen zunächst nach dem Ort der Strahlen,

1) deren entsprechende F^2 eine Gerade g berühren,
2) „ „ „ eine Ebene ε berühren,
3) „ „ „ Kegel sind,
4) die ihre zugeordneten F^2 berühren.

Die zu untersuchenden Oerter sind sämtlich Kegel, deren Ordnung zunächst festzustellen ist. Es handelt sich also um die Zahl der Kanten jedes dieser Kegel in einer Bündelebene σ.

2. 3. 4. Die entsprechenden Flächen der Strahlen von σ bilden einen Büschel $\mathfrak{B}_\sigma$ von N. In einem solchen gibt es nun bekanntlich 2, bezw. 3, 4 F^2, welche g bezw. ε berühren oder Kegel sind.

In σ gibt es daher 2, bezw. 3, 4 Strahlen von der gewünschten Eigenschaft, d. h.:

Die Kegel der Strahlen, deren entsprechende F^2 *eine gegebene Gerade oder Ebene berühren, bezw. Kegel sind, haben die Ordnungszahlen 2, 3, 4.*

5. Um die Ordnung des vierten Kegels festzustellen, ordnen wir einem Strahle s von (S,σ) die beiden Strahlen s′ zu, welche die entsprechende Fläche in $\mathfrak{B}_\sigma$ berühren. Dadurch sind umgekehrt einem Strahle s′ auch 2 Strahlen s zugeordnet, die entsprechenden der beiden F^2 von $\mathfrak{B}_\sigma$, welche s′ berühren. Die 4 Koinzidenzstrahlen der Korrespondenz [2,2], um die es sich also handelt, sind die Kanten unseres Kegels in σ. Dieser hat also die Ordnung 4.

Wir erhalten eine Bestätigung hierfür, wenn wir den von $\mathfrak{B}_\sigma$ in σ eingeschnittenen Kegelschnittbüschel C^2_σ betrachten. Dessen Kurven sind den Strahlen von σ vermöge der eineindeutigen Verwandtschaft zwischen σ und $\mathfrak{B}_\sigma$ eineindeutig zugeordnet. Ein Strahlenbüschel und ein Kegelschnittbüschel derselben Ebene, deren Elemente eineindeutig auf einander bezogen sind, erzeugen nun bekanntlich durch die Schnittpunkte entsprechender Elemente eine Kurve 3. Ordnung C^3, welche die Grundpunkte der beiden Büschel enthält. Die in σ entstehende C^3 geht also auch durch S.

Die Bündelstrahlen in σ, welche ihre entsprechenden F^2 berühren, müssen dies auch mit ihren zugeordneten Kegelschnitten von C^2_σ tun, also auch, da auf ihnen zwei erzeugende Punkte der C^3 einander unendlich nahe sind, Tangenten dieser C^3 sein. Umgekehrt ist jede von S ausgehende Tangente der C^3 mit von S verschiedenem Berührungspunkt eine von den gesuchten Geraden. Die Tangente in S an die C^3 trifft ihren entsprechenden Kegelschnitt in S und einem von S getrennten Punkte, gehört also nicht zu den Kanten unseres Kegels.

Da von jedem Punkt der C^3, also auch von S aus, 4 anderwärts berührende Tangenten an die C^3 gehen, so ist die Ordnung 4 bestätigt.

Der Kegel, gebildet von den Strahlen, welche ihre entsprechenden F^2 *berühren, hat die Ordnung 4. Es ist der*

Kegel der Tangenten von S *aus an die Fläche, welche erzeugt wird durch die Schnittpunkte entsprechender Strahlen bezw. Flächen von* S *und* N.

Gleichzeitig haben wir erkannt, dass die erzeugte Fläche von jeder Bündelebene in einer Kurve 3. Ordnung C^3 geschnitten wird, und dass sie den Punkt S enthält, da jede solche C^3 es tut. Letzteres ist auch unmittelbar klar, weil ja S einen Büschel von F^2 bestimmt, dessen jede ihren entsprechenden Strahl in S trifft.

6. Schneiden wir zwei Kegel der ersten Art mit einander oder einen Kegel der ersten Art mit einem Kegel der zweiten Art oder zwei Kegel der zweiten Art mit einander, so erhalten wir:

In S *gibt es 4, bezw. 6, 9 Strahlen, deren entsprechende* F^2 *zwei Geraden, oder eine Gerade und eine Ebene, oder zwei Ebenen berühren,*

oder:

In einem Flächennetze 2. Ordnung gibt es 4, bezw. 6, 9 Flächen, welche zwei Geraden oder eine Gerade und eine Ebene oder zwei Ebenen berühren; (ein bekanntes Resultat).

(Sturm, Untersuchungen über das Flächennetz zweiter Ordnung Nr. 16, 18 22. Crelles Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 70. — Diese Arbeit soll im folgenden unter dem abgekürzten Titel „Flächennetz 2. O.“ zitiert werden).

Dass der Kegel 4. Ordnung, dessen Kanten den Kegeln von N entsprechen, einen von den betrachteten Kegeln 2. bezw. 3. Ordnung in S in 8 bezw. 12 Kanten schneidet, bedeutet:

In einem Flächennetze 2. Ordnung gibt es 8 (Flächennetz 2. O. Nr. 45.) bezw. 12 Kegel, die eine gegebene Gerade g, *bezw. eine gegebene Ebene* ε *berühren*[1]).

[1]) Dieses letzte Resultat bezieht sich nicht wie die vorangehenden auf die Korrelation, sondern ist nur mit Hilfe der Korrelation für das Flächennetz 2. Ordnung abgeleitet. Wir werden im Verlauf der Arbeit diese beiden Arten von Resultaten erhalten, und ferner noch eine dritte Art Resultate, die ohne Heranziehung der Korrelation für das Flächennetz abgeleitet sind.

Nun wird aber eine beliebige Ebene ε von keinem Kegel des Netzes berührt, da die Tangentialebenen der Kegel eines Netzes eine Fläche bilden. Die 12 erwähnten Kegel kommen daher anders zustande. ε trifft die Kegelspitzenkurve C_K von N in 6 Punkten, da diese 6. Ordnung ist. (Sturm, Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung Nr. 16.), den Spitzen von 6 Kegeln. ε gehört also für 6 Kegel zum Bündel ihrer Spitzen.

Wenn ein Kegel an Stelle einer F^2 tritt, so geht die doppelt unendliche Mannigfaltigkeit ihrer Berührungsebenen über in die der Ebenen des doppelt zu zählenden Bündels mit seiner Spitze als Scheitel. Jede Ebene durch die Spitze des Kegels kann also als doppelte Tangentialebene im uneigentlichen Sinne angesehen werden.

Die ε ist also doppelte Tangentialebene der 6 Kegel, deren Spitzen sie enthält. So kommt die Zahl 12 der Kegel, welche ε berühren, zustande.

Wir können jetzt, rückwärts gehend, den Schluss ziehen, dass die 12 Schnittkanten des Kegels 4. Ordnung der Strahlen, deren entsprechende F^2 Kegel sind, mit dem Kegel 3. Ordnung in S, dessen Kanten den F^2 zugeordnet sind, welche ε berühren, zu je zweien zusammenfallen, die beiden Kegel also einander 6 mal berühren.

Bringen wir endlich den letzten Kegel mit je einem vorher betrachteten Kegel zum Schnitt, so ergibt sich:

Das System der Flächen des Netzes, welche ihre entsprechenden Strahlen berühren, ist so beschaffen, dass eine gegeben Gerade von 8, eine gegebene Ebene von 12 dieser F^2 *berührt wird, und dass 16 von ihnen Kegel sind.*

II.

Die Ebenenörter.

Wir wenden uns nun der zweiten Frage zu, der nach dem Ort der Ebenen,

1) deren entsprechende R^4 eine Gerade g treffen,
2) „ „ „ eine Ebene ε berühren,
3) „ „ „ einen Doppelpunkt besitzen,
4) die ihre zugeordneten R^4 berühren.

Diese Oerter sind ebenfalls Kegel mit der Spitze S. Es handelt sich um ihre Klasse, d. h. um die Zahl ihrer Tangentialebenen durch einen Bündelstrahl s.

Die den Ebenen durch s entsprechenden R^4 liegen auf der Netzfläche F^2_s, welche dem Strahl s zugeordnet ist.

7. Da g die F^2_s in zwei Punkten trifft, und durch jeden eine R^4 geht, welche auf F^2_s verläuft, so trifft g zwei von diesen R^4; durch s gehen also zwei von den gesuchten Ebenen, d. h. *der Kegel, umhüllt von den Ebenen, deren zugeordnete* R^4 *eine Gerade* g *treffen, hat die Klassenzahl 2.*

8. Es handelt sich ferner um die Zahl der auf F^2_s gelegenen R^4, die eine Ebene ε berühren.

Die Berührungspunkte der eine Ebene ε berührenden R^4 bilden in dieser eine Kurve 3. Ordnung J^3, den Ort der Berührungspunkte, die zwischen je zwei Kurven des in ε eingeschnittenen Kegelschnittnetzes und dann allen ihres Büschels vorhanden sind (Flächennetz 2. O. Nr. 9; dort T^3 genannt). J^3 ist die Jacobische Kurve dieses Netzes. (Sturm, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften, III, Nr. 686).

Die Curve J^3 hat mit der Schnittkurve (ε, F^2_s), einem Kegelschnitt C^2_ε, 6 Punkte gemein. Durch jeden, Q_i, von ihnen geht, da Q_i auf J^3 liegt, eine R^4, die ε berührt, eben in Q_i, und jede dieser R^4 liegt auf F^2_s, weil Q_i es tut.

Also diese 6 auf F^2_s gelegenen R^4 berühren ε, und offenbar nur diese. Mithin gehen 6 Ebenen von der betrachteten Eigenschaft durch s, *d. h. der Kegel, umhüllt von den Ebenen, deren zugeordnete* R^4 *eine Ebene* ε *berühren, hat die Klasse 6.*

Da es in N 9 Grundkurven R^4 gibt, welche ε osculieren, (Flächennetz 2. O. Nr. 11) so kommen in S 9 Ebenen vor, deren zugeordnete R^4 die ε osculieren. Diese 9 Ebenen gehören auch zu den Tangentialebenen unseres Kegels, und zwar sind es seine Wendetangentialebenen.

9. Da die Grundkurven, welche einen Doppelkunkt besitzen, eine Fläche von der Ordnung 24 bilden (Flächen-

netz 2. O. Nr. 25), und F^2_s mit dieser 12 Grundkurven gemein hat, so gibt es 12 Grundkurven auf F^2_s, welche einen Doppelpunkt besitzen, *d. h. der Kegel, dessen Tangentialebenen den Grundkurven mit je einem Doppelpunkt entsprechen, hat die Klasse 12.*

Zu den Tangentialebenen dieses Kegels gehören auch die, deren entsprechende R^4 2 Doppelpunkte haben, also zerfallen. Solche R^4 gibt es 28. (Flächennetz 2. O. Nr. 24). Die besagten Ebenen sind natürlich Doppeltangentialebenen.

10. Es handelt sich jetzt noch um den letzten Kegel. Um dessen Klassenzahl festzustellen, denken wir uns den Büschel um s doppelt und legen zwischen den beiden Büscheln eine Korrespondenz fest.

Eine Ebene ξ des ersten Büschels wird, wie wir in 8 allgemein für jede beliebige Ebene erörtert haben, von 6 Grundkurven R^4 berührt, welche auf einer festen Fläche, also auch auf F^2_s, verlaufen.

Die 6 diesen R^4 zugeordneten Bündelebenen ξ', die ja auch durch s gehen, ordnen wir der ξ zu.

In der so bestimmten Korrespondenz kommen wir von einer Ebene ξ' zu den entsprechenden Ebenen ξ folgendermassen:

Wir nehmen die der ξ' zugeordnete $R^4_{\xi'}$ und suchen die Ebenen durch s auf, welche diese $R^4_{\xi'}$ berühren. Das sind die zugehörigen Ebenen ξ.

Die Zahl dieser Ebenen ξ ist gleich der Zahl der Tangenten der $R^4_{\xi'}$, welche s treffen, d. h. gleich dem Range der $R^4_{\xi'}$. Nun hat eine R^4 dieser Art den Rang 8. (Vgl. Sturm, Synthetische Untersuchungen über Flächen 3. Ordnung Nr. 10). Also gibt es 8 Ebenen ξ. Unsere Korrespondenz ist daher eine Korrespondenz [8,6].

Jede von den 14 Koinzidenzebenen wird von ihrer entsprechenden R^4 berührt. Denn als Ebene ξ ist sie Tangentialebene von 6 auf der F^2_s gelegenen Grundkurven R^4, und als Ebene ξ' ist sie einer dieser R^4 zugeordnet. Da umgekehrt jede Ebene von der verlangten Eigenschaft Koin-

zidenzebene in unserer Korrespondenz sein muss, so ist 14 die Anzahl der gesuchten Ebenen durch s und die Klasse des betrachteten Kegels.

Also umhüllen die Ebenen von S, *welche ihre entsprechenden* R^4 *in* N *berühren, einen Kegel 14. Klasse.*

11. Wir wollen nun wieder die gemeinsamen Elemente je zweier der hier betrachteten Kegel aufsuchen und deren entsprechende R^4.

Dass zwei der Kegel 2. Klasse 4, ein Kegel 2. und einer 6. Klasse 12 und zwei Kegel 6. Klasse 36 Tangentialebenen gemeinsam haben, bedeutet hier:

In einem Flächennetze 2. Ordnung gibt es 4 Grundkurven, welche zwei gegebene Geraden treffen, 12, welche eine gegebene Gerade treffen und eine gegebene Ebene berühren, 36, welche zwei gegebene Ebenen berühren. (Flächennetz 2. O. Nr. 8, 9 auf anderm Wege bewiesen).

Dass der Kegel 12. Klasse mit einem der Kegel 2. Klasse 24 Tangentialebenen gemein hat, bedeutet, *dass 24 Grundkurven mit je einem Doppelpunkt eine Gerade treffen, oder dass die von diesen Grundkurven gebildete Fläche die Ordnung 24 hat*, also nichts neues, da wir ja hiervon ausgegangen sind.

Hingegen schliessen wir aus der Zahl 72 der gemeinsamen Tangentialebenen des Kegels 12. Klasse mit einem der Kegel 6. Klasse, *dass 72 Grundkurven mit je einem Doppelpunkt eine beliebige Ebene berühren.*

Suchen wir endlich noch die gemeinsamen Elemente des letzten Kegels mit den anderen Kegeln auf, so erhalten wir die Resultate:

Das System der Grundkurven von N, *die ihre entsprechenden Ebenen berühren, ist so beschaffen, dass 28 von ihnen eine beliebige Gerade treffen, 84 eine beliebige Ebene berühren und 168 einen Doppelpunkt haben.*

Das erste bedeutet:

Die Fläche, welche gebildet wird durch die Grundkurven von N, *die ihre entsprechenden Ebenen berühren, hat die Ordnung 28.*

III.

Genauere Betrachtung der in 2—11 betrachteten Oerter.

Wir können nun die in I und II behandelten Kegel als Tangentialebenengebilde bezw. als Strahlenörter betrachten.

12a. Der Kegel in Nr. 2. wird gebildet von den Strahlen, deren entsprechende F^2 eine gegebene Gerade berühren. Diesem Kegel als Tangentialebenengebilde entspricht also die Enveloppe der Gesamtheit dieser F^2, und den umhüllenden Ebenen sind die Charakteristiken auf jener Enveloppe zugeordnet.

Nun ist die Enveloppe der F^2, welche eine Gerade g berühren, die Fläche, gebildet von den R^4, die diese Gerade treffen, mit diesen R^4 als Charakteristiken. (Flächennetz 2. O. Nr. 7.).

Der Kegel in 2. ist also als Tangentialebenengebilde identisch mit dem Kegel in 7.

Hiermit haben wir erkannt:

Jeder Geraden g *des Raumes ist ein Kegel 2. Grades von* S: K^2_{2g} *zugeordnet*; *seine Kanten sind die Strahlen von* S, *deren entsprechende* F^2 *von* N *die* g *berühren, seine Tangentialebenen sind die Ebenen von* S, *deren entsprechende* R^4 *von* N *die* g *treffen. Es gehören als Kante und Berührungsebene solche zusammen, deren entsprechende Fläche bezw. Grundkurve die Gerade* g *in dem nämlichen Punkte berühren bezw. treffen.*

b. α). Liegt g auf einer Fläche des Netzes, so artet dieser Kegel K^2_{2g} aus, und zwar in verschiedener Weise, je nachdem wir ihn als Kanten- oder als Tangentialebenengebilde betrachten.

Einer Ebene σ von S entspricht ja ein Büschel $\mathfrak{B}_\sigma$ von N, und in diesem gibt es wie im allgemeinen Falle 2 F^2, die g berühren.

Geht nun σ durch den Strahl s_g, dessen zugeordnete Fläche F^2 die g enthält, (wir wollen sie mit $F^2(g)$ bezeichnen zum Unterschied von F^2_g, der dem Strahl g von S zugeordneten Fläche), so enthält $\mathfrak{B}_\sigma$ die $F^2(g)$.

Die R^4_σ verläuft also auf $F^2(g)$ und trifft daher g in zwei Punkten. In denselben beiden Punkten treffen alle Flächen des Büschels $\mathfrak{B}_\sigma$ die g, mithin gibt es ausser $F^2(g)$ in $\mathfrak{B}_\sigma$ keine F^2, welche g berührt. In jeder Ebene σ durch s_g ist daher s_g der einzige Strahl, dessen entsprechende F^2 die g berührt. s_g ist also doppelt zu zählen als Kante des von diesen Strahlen gebildeten Kegels K^2_2. Dieser Kegel muss wegen der Existenz der Doppelkante s_g in zwei Ebenen durch s_g zerfallen, ist also ein Ebenenpaar. Die Ebenen dieses Paares lassen sich leicht erkennen. Die auf $F^2(g)$ gelegenen Grundkurven treffen ja g in je zwei Punkten, und diese Gruppen von je zwei Punkten bilden die Paare einer Involution, die Schnittinvolution von g mit einem Büschel von N, der die $F^2(g)$ nicht enthält. Jede Fläche eines solchen Büschels bestimmt ja mit $F^2(g)$ zusammen eine R^4, welche g in denselben beiden Punkten wie die Fläche trifft. Der Büschel von Grundkurven auf $F^2(g)$ ruft also dieselben Schnittpunktegruppen auf g hervor wie der erwähnte Flächenbüschel, und weil dieser auf g eine Involution bestimmt, so tut es auch der Büschel von Grundkurven auf der $F^2(g)$. Jeder der beiden Doppelpunkte in dieser Involution bestimmt eine R^4 der $F^2(g)$, welche g in zwei vereinigten Punkten trifft, also berührt; die F^2 jedes der beiden zugehörigen Büschel berühren alle die g. Diese beiden die g berührenden R^4 haben entsprechende Ebenen, die natürlich durch s_g gehen und nur solche Bündelstrahlen enthalten, deren entsprechende F^2 die g berühren.

Die beiden Ebenen bilden also in unserem Falle den betrachteten Strahlenort, sie sind die Ebenen des Ebenenpaars, von dem die Rede war.

Wir betrachten nun den der Geraden g entsprechenden Kegel 2. Klasse.

Die Ebenen durch einen Bündelstrahl s, deren entsprechende R^4 die g treffen, müssen natürlich ihre zugeordneten R^4 auf der F^2_s liegen haben. g trifft wie im allge-

meinen Falle F^2_s in zwei Punkten, aber diese bestimmen jetzt dieselbe R^4, die Schnittkurve der F^2_s und der $F^2(g)$. Diese hat mit g, weil sie auf $F^2(g)$ liegt, zwei Punkte gemein, und dies sind, weil die R^4 auch der F^2_s angehört, die gemeinsamen Punkte von g und F^2_s.

Es gibt mithin nur eine Ebene durch s, deren entsprechende R^4 die g trifft. Da aber 2 solche Treffpunkte vorhanden sind, so ist diese Ebene doppelt zu zählen.

Weil dies nun für jeden Bündelstrahl gilt, so ist der zu untersuchende Kegel dargestellt durch einen doppelt zu zählenden Ebenenbüschel. Axe dieses Büschels ist natürlich s_g, da jede R^4, welche g trifft, dies in Punkten von $F^2(g)$ tut, also auf $F^2(g)$ liegt, mithin ihre entsprechende Ebene durch s_g geht.

Es hat sich also ergeben:

Liegt g *auf einer Fläche des Netzes, so tritt an Stelle des allgemeinen zugeordneten Kegels 2. Klasse der doppelt zu zählende Ebenenbüschel um den dieser Fläche zugeordneten Strahl als Axe, an Stelle des allgemeinen zugeordneten Kegels 2. Ordnung ein Ebenenpaar mit diesem Strahl als Schnittlinie. Die Ebenen dieses Paares sind den beiden Grundkurven der Fläche zugeordnet, welche* g *berühren.*

Lassen wir g die $F^2(g)$ durchlaufen, zuerst die eine und dann die andere Regelschar, so bleibt für jede der Regelscharen der Kegel 2. Klasse fest, als doppelt zu zählender Ebenenbüschel um s_g. Die Ebenen der Paare ändern sich mit g, weil zugleich mit g auch die beiden g berührenden Grundkurven auf $F^2(g)$ wechseln. Hingegen bleibt die Schnittlinie der Ebenen jedes dieser Paare erhalten; dies ist ja s_g.

Entsprechend den beiden Regelscharen auf $F^2(g)$ erhalten wir zwei Systeme solcher Ebenenpaare um s_g.

Nehmen wir nun umgekehrt eine Ebene ξ durch s_g, so fragt sich, zu wie vielen dieser Ebenenpaare des einen oder andern Systems sie gehört, d. h. von wie vielen Geraden der $F^2(g)$ die R^4_ξ, die ja auf $F^2(g)$ verläuft, berührt wird.

Wir wollen die beiden Scharen auf $F^2(g)$ mit $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ bezeichnen. Soll eine Tangente der R^4_ξ der $\mathfrak{R}_1$ angehöen, so muss sie eine beliebige Gerade der $\mathfrak{R}_2$ treffen. Und umgekehrt: wenn eine Tangente der $\mathfrak{R}^4_\xi$ eine Gerade der $\mathfrak{R}_2$ in einem nicht auf R^4_ξ gelegenen Punkte trifft, so gehört sie der $\mathfrak{R}_1$ an. Denn sie hat dann mit der Trägerfläche der $\mathfrak{R}_2$ 3 Punkte gemein, den Treffpunkt mit der Geraden von $\mathfrak{R}_2$ und die beiden im Berührungspunkte mit R^4_ξ vereinigten; sie muss also ganz auf der Trägerfläche liegen und der $\mathfrak{R}_1$ angehören. Wenn der Treffpunkt mit der Geraden von $\mathfrak{R}_2$ mit dem Berührungspunkt auf R^4_ξ zusammenfällt, so kommt die Zahl 3 der gemeinsamen Punkte mit der Trägerfläche nicht zustande.

Eine beliebige Gerade wird von 8 Tangenten einer Büschelgrundkurve 4. Ordnung getroffen, da eine solche den Rang 8 hat (Nr. 10). Eine Sekante einer R^4 wird natürlich von der Tangente in ihrem Stützpunkt getroffen. Da diese doppelt zu zählen ist, so bleiben 6 die Sekante anderwärts treffende Tangenten; eine Doppelsekante wird von vier Tangenten ausserhalb der beiden Stützpunkte getroffen.

Eine Gerade 1 der $\mathfrak{R}_2$ ist nun Doppelsekante der R^4_ξ. Mithin wird sie ausserhalb der beiden Schnittpunkte mit R^4_ξ von 4 Tangenten der R^4_ξ getroffen. Diese 4 die 1 treffenden Tangenten liegen, wie eben erörtert, auf der $F^2(g)$, und 1 führt uns nur zu diesen. Da die 4 nun auch jede Gerade der $\mathfrak{R}_2$ treffen, so würde jede andere Gerade der $\mathfrak{R}_2$ zu denselben 4 Tangenten der R^4_ξ führen, welche auf $F^2(g)$ liegen.

Für jede von diesen 4 Geraden: m_1, m_2, m_3, m_4 ist R^4_ξ die eine sie berührende Grundkurve, jede bestimmt noch eine zweite solche Grundkurve, und diese zweiten Grundkurven senden ihre zugeordneten Ebenen ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3, ξ'_4 durch s_g.

Die Ebene ξ gehört also zu 4 Ebenenpaaren des einen Systems, nämlich zu

$$(\xi, \xi'_1),\ (\xi, \xi'_2),\ (\xi, \xi'_3),\ (\xi, \xi'_4),$$

ebenso natürlich zu 4 Ebenenpaaren des andern Systems.

Ordnen wir die 4 Ebenen ξ' der Ebene ξ zu, so ist damit in dem Büschel s_g eine Korrespondenz festgelegt. Da wir in derselben Weise wie von ξ zu ξ' auch von ξ' zu ξ gelangen, so handelt es sich um eine Korrespondenz [4,4]. Entsprechend hierin sind solche Ebenen, deren zugeordnete R^4 dieselbe Gerade von $\mathfrak{R}_1$ berühren. Jede von den 8 Koinzidenzebenen führt also zu einer Geraden der $F^2(g)$, die nur von einer R^4 der $F^2(g)$ berührt wird. Ebenso führt das andere System von Ebenenpaaren zu 8 solchen Geraden.

Auf $F^2(g)$ verlaufen also 16 Geraden, 8 in der einen, 8 in der anderen Regelschar, deren zugeordneter Kegel 2. Ordnung durch eine doppelt zu zählende Ebene durch s_g dargestellt wird. Diese Geraden lassen sich leicht erkennen. Es sind die durch die 8 Grundpunkte auf $F^2(g)$ bestimmten. Durch jeden Grundpunkt P_i gehen ja 2 Geraden, je der einen und anderen Schar angehörig.

β). Nehmen wir eine Gerade l durch P_i auf $F^2(g)$, etwa die der $\mathfrak{R}_1$ angehörige, so wird sie von allen R^4 der $F^2(g)$ in zwei Punkten getroffen, deren einer P_i ist. Der zugeordnete Kegel 2. Klasse ist also wie im allgemeineren Falle der doppelt zu zählende Ebenenbüschel um s_g.

Hingegen wird die Gerade l nicht mehr von 2 Grundkurven der $F^2(g)$ berührt. Jeder von P_i verschiedene Punkt P auf l bestimmt eine R^4 auf $F^2(g)$, die l in P und in P_i, also in zwei getrennten Punkten, trifft. Die Involution auf l ist parabolisch. Nur der eine oder andere Nachbarpunkt von P_i führt zu einer R^4, die l berührt, eben in P_i. Diese R^4 ist doppelt zu zählen, weil sie die Grenzlage der beiden Reihen von R^4 ist, die entstehen, wenn wir den Punkt P sich dem Punkt P_i von der einen oder anderen Seite nähern lassen; mithin auch die zugeordnete Ebene.

Die Geraden, welche auf Flächen des Netzes liegen, bilden einen Komplex 3. Grades (Flächennetz 2. O. Nr. 10). Während einer beliebigen Geraden des Raumes ein Kegel 2. Grades zugeordnet ist, in dem oben erörterten Sinne, artet dieser

Kegel für die Geraden dieses Komplexes in der beschriebenen Weise aus.

Dem Komplex 3. Grades gehören die 8 Bündel mit den Scheiteln P_i an. Denn nehmen wir eine Gerade n durch P_i und bestimmen eine Netzfläche durch 2 Punkte Q_1 und Q_2 auf ihr, so enthält diese F^2 die 3 auf der n gelegenen Punkte Q_1, Q_2, P_i, mithin die n ganz. Je 2 andere Punkte auf der n hätten auch eine F^2 aus N bestimmt, welche die n ganz enthält. Diese F^2 wäre mit der durch Q_1 und Q_2 gehenden identisch, weil sie beide die n enthalten, und zwei verschiedene Flächen nie eine beliebige Gerade gemeinsam haben. (Nur 28 Geraden liegen auf je einfach unendlich vielen Flächen des Netzes. Flächennetz 2. O. Nr. 24). Hiermit ist gezeigt, dass jede Gerade durch einen Grundpunkt auf einer und nur einer Fläche des Netzes liegt, also einfach dem Komplex 3. Grades angehört.

Für die Geraden l *dieser 8 Bündel mit den Scheiteln* P_i *artet also der entsprechende Kegel in* S *noch stärker aus, und zwar wird er als Tangentialebenengebilde dargestellt durch den doppelt zu zählenden Ebenenbüschel, dessen Axe der Fläche* $F^2(l)$ *entspricht, als Kantengebilde durch ein Ebenenpaar mit in einer Ebene vereinigten Elementen, nämlich in derjenigen Ebene, deren zugeordnete* R^4 *die* l *in* P_i *berührt.*

γ). Endlich können wir g in eine Gerade legen, welche unendlich vielen Flächen des Netzes angehört. Solche Geraden gibt es 28, die, welche je 2 der 8 Grundpunkte verbinden. Sie bilden zusammen mit den immer je die 6 übrigen Grundpunkte verbindenden kubischen Raumkurven die 28 zerfallenden Grundkurven des Netzes. (Flächennetz 2. O. Nr. 24).

Da alle Grundkurven diese Gerade g in 2 getrennten Punkten, den Grundpunkten P_i und P_k, treffen, so gibt es keine, welche g berührt, mithin auch keine solche F^2. Im uneigentlichen Sinne wird g berührt von allen den F^2, welche g enthalten. Die diesen Flächen entsprechenden

Strahlen bilden den der g zugeordneten Kegel 2. Ordnung. Bezeichnen wir g in unserem Falle, weil sie P_i und P_k verbindet, mit g_{ik}, die ergänzende kubische Raumkurve mit R^3_{ik}, so liegen alle diese Strahlen in der Ebene, welche der Grundkurve (g_{ik}, R^3_{ik}) entspricht. Diese Ebene ist als zugeordneter Kegel doppelt zu rechnen, denn jeder Strahl in ihr hat als zugeordnete Netzfläche eine F^2, welche die g_{ik} enthält. Eine solche F^2 kann aber angesehen werden als Fläche, welche die g_{ik} in 2 aufeinander folgenden Punkten, also doppelt berührt.

Die Verhältnisse hinsichtlich des zugeordneten Kegels 2. Ordnung liegen also nicht wesentlich anders für eine Gerade, welche durch 2 Grundpunkte geht, als für eine, welche durch einen Grundpunkt geht: es ist in beiden Fällen eine doppelt zu zählende Ebene.

Der zugeordnete Kegel 2. Klasse aber wird unbestimmt. Denn jede R^4 trifft ja die g_{ik} in P_i und P_k, jede Büudelebene gehört also diesem Kegel 2. Klasse an, und zwar doppelt.

13 a). Wir haben in 3. ferner den Kegel betrachtet, gebildet von den Strahlen, deren entsprechende F^2 eine gegebene Ebene ε berühren. Als Tangentialebenengebilde entspricht er der Enveloppe der F^2, welche ε tangieren, und seine Tangentialebenen sind den Charakteristiken auf dieser Enveloppe zugeordnet.

Nun ist die Enveloppe der F^2, welche eine gegebene Ebene ε berühren, die Gesamtheit der R^4, die ε berühren, mit jenen R^4 als Charakteristiken. (Flächennetz 2. O. Nr. 9). Daraus folgt, dass der Kegel in 3. als Tangentialebenengebilde identisch ist mit dem Kegel in 8. Hiermit haben wir erkannt:

Jeder Ebene ε des Raumes ist ein Kegel 3. Ordnung 6. Klasse zugeordnet. Seine Kanten sind die Strahlen, deren entsprechende F^2, seine Tangentialebenen die Ebenen, deren zugeordnete R^4 die ε berühren. Es gehören wiederum eine

Kante und Berührungsebene zusammen, wenn die entsprechende Fläche und Grundkurve die Ebene ε *in demselben Punkte berühren.*

Für einen solchen Kegel 3. Ordnung, 6. Klasse, also einen allgemeinen Kegel 3. Ordnung, sind bekanntlich die einzigen auftretenden singulären Elemente die 9 Wendeberührungsebenen. Dass 9 Wendeberührungsebenen vorhanden sind, ist uns bereits durch den Umstand bekannt, dass ε von 9 R^4 osculiert wird, welchen ja die Wendetangentialebenen entsprechen. (Nr. 8).

Liegt g *in* ε, *so berühren sich die zugehörigen Kegel 2. und 3. Ordnung in den 3 Kanten, welche den 3 Schnittpunkten der Geraden* g *und der Jacobischen Kurve in* ε *als Berührungspunkten entsprechen.*

b). Für gewisse specielle Lagen von ε treten Singularitäten bei dem zugeordneten K^3_6 auf.

α). Es sei zunächst ε Tangentialebene eines Kegels K von N. Dann berührt jede R^4, welche auf K liegt, die ε zweimal, nämlich in den beiden Treffpunkten mit t, der Berührungskante von K und ε, ausser $R^4(L)$, wo L die Spitze von K ist, welche ε einmal berührt und einmal in L doppelt trifft.

Da es in einem beliebigen Büschel 3 Flächen F^2 gibt, welche ε berühren, so liegen in einer beliebigen Ebene σ von S 3 Kanten des der ε zugeordneten Kegels. Es ist also auch hier wie im allgemeinen Falle 3 die Ordnungszahl.

Geht nun σ durch den dem K entsprechenden Strahl s_K, so ist der σ ein Flächenbüschel $\mathfrak{B}_\sigma$ zugeordnet, dem K angehört. Von den 4 Grundpunkten des von $\mathfrak{B}_\sigma$ in ε eingeschnittenen Kegelschnittbüschels C^2_σ fallen je 2 zusammen in einem Punkt von t. In t fallen daher 2 Geradenpaare von C^2_σ zusammen. Das dritte ist getrennt hiervon. Daher sind 2 von den F^2, welche ε berühren, in K vereinigt. Der Strahl s_K repräsentiert daher in σ 2 Kanten des K^3. Da das für jede Ebene σ durch s_K gilt, so ist s_K Doppelkante auf dem K^3.

Wenn ε *Tangentialebene eines Kegels* K *von* N *ist, so hat der zugeordnete Kegel 3. Ordnung den dem* K *entsprechenden Strahl zur Doppelkante und ist daher nur noch von der 4. Klasse.*

Da die Tangentialebenen eines Kegels K des Netzes zu je einem zugeordneten K^3_4 mit Doppelkante führen, und zwar alle Tangentialebenen desselben K zu Kegeln K^3_4 mit derselben Doppelkante, nämlich s_K, da ferner eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Kegeln K in N vorhanden ist, *so haben wir zunächst ein zweifach unendliches System von Kegeln* K^3_4 *mit je einer Doppelkante erhalten, diese Doppelkanten sind aber nur in einfach unendlicher Mannigfaltigkeit vorhanden; es sind die den Kegeln von* N *entsprechenden Bündelstrahlen; diese Doppelkanten bilden also als solche einen Kegel 4. Ordnung.* (*Nr. 4*).

β). Es gibt Ebenen, die zugleich von 2 Kegeln des Netzes berührt werden. Legen wir nämlich an eine R^4, die einen Doppelpunkt L besitzt, in L die beiden Tangenten, und verbinden wir diese durch eine Ebene $\mathfrak{S}$, so ist $\mathfrak{S}$ für 2 Kegel von N Tangentialebene. Denn $\mathfrak{S}$ wird in L von allen F^2 des Büschels $R^4(L)$ berührt, also in Geradenpaaren mit dem Mittelpunkt L geschnitten. Diese Geradenpaare bilden eine Involution, und deren Doppelstrahlen sind Berührungskanten von $\mathfrak{S}$ mit zwei Kegeln des Büschels, K′ und K″. Der einzige weitere Kegel ist derjenige, K, welcher L zur Spitze hat.

Jeder Doppelpunkt einer Grundkurve ist ja Spitze für einen Kegel ihres Büschels.

K vertritt also 2 Kegel im Büschel $R^4(L)$, so dass ein solcher Büschel nur 3 Kegel enthält.

Die Jacobische Kurve des in $\mathfrak{S}$ eingeschnittenen Kegelschnittnetzes besteht aus den Berührungskanten t′ und t″ der Kegel K′ und K″ mit $\mathfrak{S}$ und einer dritten Geraden Σ. (Zum vorangehenden vgl. Flächennetz 2. O. Nr. 23, 24, 25). Der der Ebene $\varepsilon \equiv \mathfrak{S}$ zugeordnete Kegel K^3 hat, weil $\mathfrak{S}$ von 2 Kegeln, K′ und K″, berührt wird, 2 Doppelkanten,

die den Kegeln K′ und K″ entsprechenden Strahlen $s_{K'}$ und $s_{K''}$. Er muss also zerfallen in eine Ebene und einen Kegel 2. Ordnung. Die Ebene ist durch die beiden Strahlen $s_{K'}$ und $s_{K''}$ bestimmt. Dass diese Ebene dem betrachteten Kegel K^3 angehören muss, finden wir nachträglich bestätigt. Denn die in ihr gelegenen Bündelstrahlen entsprechen den Flächen des Büschels $R^4(L)$, die ja alle $\mathfrak{S}$ in L berühren. Daher müssen diese Strahlen in der Ebene $(s_{K'}, s_{K''})$ zum Kegel K^3 gehören.

Der restierende Kegel 2. Grades hat zu Kanten die Strahlen, deren entsprechende F^2 die $\mathfrak{S}$ ausserhalb L, also in Punkten von Σ berühren.

Diese Flächen berühren also alle die Σ. Demnach ist dieser restierende Kegel 2. Grades der K^2_2, welcher der Geraden Σ zugeordnet ist.

Der einer Ebene $\mathfrak{S}$ zugeordnete Kegel 3. Ordnung zerfällt in die Verbindungs-Ebene der beiden Strahlen, deren entsprechende Kegel beide $\mathfrak{S}$ berühren, und den Kegel 2. Grades, welcher der in $\mathfrak{S}$ gelegenen Geraden Σ zugeordnet ist.

Da es eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Ebenen $\mathfrak{S}$ gibt, — jeder Punkt der Kegelspitzenkurve führt zu einer Ebene $\mathfrak{S}$ — *so haben wir eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von solchen zerfallenden Kegeln 3. Ordnung in* S.

Die Ebenen, welche zu diesen Kegeln gehören, sind die, deren entsprechende R^4 *einen Doppelpunkt* L *besitzen, diese Ebenen umhüllen also einen Kegel 12. Klasse*, den in 9 behandelten.

Das System der restierenden Kegel 2. Ordnung ist also dem System der Geraden Σ zugeordnet, d. h. einer Regelfläche 8. Grades. (Flächennetz 2. O. Nr. 36).

γ). Wir lassen jetzt ε durch einen Grundpunkt P_i gehen. Dann wird ε in P_i von einer Fläche des Netzes berührt.

Nehmen wir nämlich irgend 2 nicht auf derselben Geraden durch P_i in ε gelegenen Nachbarpunkte von P_i: P_i' und P_i'', so bestimmen diese eine F^2 in N, die zwei in ε fallende

Tangenten hat: $P_i P'_i$ und $P_i P''_i$, die mithin von ε in P_i berührt wird. Sie enthält also alle Nachbarpunkte von P_i in ε, sodass je 2 beliebige Punkte P'_i und P''_i zu derselben F^2 geführt hätten, und diese wirklich die einzige derartige ist; sie heisse $F^2(\varepsilon)$.

Jede auf $F^2(\varepsilon)$ verlaufende R^4 geht durch P_i und einen Nachbarpunkt von P_i auf der $F^2(\varepsilon)$, berührt mithin die ε in P_i. Umgekehrt liegt jede R^4, welche ε in P_i berührt, auf $F^2(\varepsilon)$. Denn eine solche R^4 enthält ja einen Nachbarpunkt von P_i in ε, und alle diese Nachbarpunkte liegen auf $F^2(\varepsilon)$.

Es ist also $F^2(\varepsilon)$ Ort der Grundkurven, welche ε in P_i berühren.

Der Kegel, welcher der Ebene ε zugeordnet ist, wird von jeder Bündelebene in 3 Strahlen getroffen, ist also 3. Ordnung. Dies folgt wie im allgemeinen Falle.

Nehmen wir nun eine Ebene σ durch den der $F^2(\varepsilon)$ entsprechenden Strahl s_ε, so liegt die ihr zugeordnete R^4 auf $F^2(\varepsilon)$, berührt mithin ε in P_i. Die Ebene ε schneidet aus dem zu R^4 gehörigen F^2-Büschel einen Kegelschnittbüschel mit zwei vereinigten Grundpunkten aus. Von dessen Geradenpaaren vereinigen sich zwei in demjenigen, das seinen Doppelpunkt im Berührungspunkt P_i hat; dies rührt von $F^2(\varepsilon)$ her. Also zählt in der Ebene σ der dieser Fläche entsprechende Strahl s_ε doppelt unter den Schnittstrahlen mit dem Kegel 3. Ordnung, und so in jeder Ebene σ durch s_ε. Mithin ist s_ε Doppelkante dieses Kegels 3. Ordnung.

Wir sind also zu einer zweiten Art von Systemen von Kegeln K^3_4 *mit Doppelkante gelangt. Ein solcher Kegel ist zugeordnet einer durch einen Grundpunkt gehenden Ebene. Da wir 8 Grundpunkte haben, so sind 8 solcher Systeme vorhanden, jedes gebildet von einer zweifach unendlichen Mannigfaltigkeit von Kegeln, entsprechend den doppelt unendlich vielen Ebenen durch einen Grundpunkt.*

Die Doppelkanten dieser Kegel entsprechen den Netzflächen, welche zu Tangentialebenen die Ebenen der Bündel P_i *in* P_i *haben, d. h. allen Flächen des Netzes. Sie erfüllen also den Bündel* S.

Jeder Strahl s von S ist Doppelkante je eines Kegels aus allen 8 Systemen, weil die Fläche F^2_s in jedem der Punkte P_i von einer Ebeneberührt wird.

δ). Die letzte Lage von ε können wir noch spezialisieren, indem wir ε durch 2 Grundpunkte P_i und P_k gehen lassen. Eine solche Ebene ε wird in P_i von einer Fläche, $F^2(\varepsilon)_i$, und in P_k von einer Fläche, $F^2(\varepsilon)_k$, berührt. Der entsprechende K^3 hat also 2 Doppelkanten $s_{\varepsilon,i}$ und $s_{\varepsilon,k}$, die den Flächen $F^2(\varepsilon)_i$ und $F^2(\varepsilon)_k$ entsprechenden Strahlen. Die Ebene, welche sich daher von K^3 ablösen muss, ist bestimmt durch die beiden Strahlen $s_{\varepsilon,i}$ und $s_{\varepsilon,k}$; sie entspricht also der Schnittkurve der beiden Flächen $F^2(\varepsilon)_i$ und $F^2(\varepsilon)_k$.

Da die $F^2(\varepsilon)_i$ von der Geraden $g_{ik} \equiv P_i P_k$ die Punkte P_i, P_k und den Nachbarpunkt von P_i enthält, so gehört ihr die g_{ik} ganz an, ebenso der $F^2(\varepsilon)_k$, sodass also die den beiden F^2 gemeinsame Grundkurve die Kurve (g_{ik}, R^3_{ik}) ist. Deren entsprechende Ebene σ_{ik} in S löst sich von dem der ε zugeordneten K^3 ab.

Lassen wir ε den Büschel um g_{ik} durchlaufen, so durchläuft $F^2(\varepsilon)_i$ den Büschel mit der Grundkurve (g_{ik}, R^3_{ik}), ebenso $F^2(\varepsilon)_k$. Für den entsprechenden K^3 bleibt die sich ablösende Ebene fest, als Ebene, welche der Kurve (g_{ik}, R^3_{ik}) zugeordnet ist; der restierende Kegel 2. Ordnung variiert. Er schneidet die Ebene σ_{ik} immer in 2 zugehörigen Strahlen $s_{\varepsilon,i}$ und $s_{\varepsilon,k}$.

Die Büschel der einander zugehörigen $s_{\varepsilon,i}$ und $s_{\varepsilon,k}$ sind projektiv.

Denn ein Strahl $s_{\varepsilon,i}$ sendet seine entsprechende Fläche durch die (g_{ik}, R^3_{ik}). Diese Fläche wird in P_i von einer

Ebene ε berührt, welche g_{ik} enthält, weil ja g_{ik} eine Gerade ist, welche auf der Fläche durch P_i läuft. ε geht daher durch P_k und wird in P_k ebenfalls von einer Fläche des Netzes berührt. Deren entsprechenden Strahl $s_{\varepsilon,k}$ ordnen wir dem $s_{\varepsilon,i}$ zu. Dem $s_{\varepsilon,k}$ ist in ganz analoger Weise nur der eine Strahl $s_{\varepsilon,i}$ zugeordnet.

Da es 2 Koinzidenzstrahlen in dieser Projektivität gibt, so sind unter den Ergänzungskegeln 2. Ordnung von σ_{ik} 2 vorhanden, welche σ_{ik} berühren. Diese Berührungskanten entsprechen den beiden Kegeln des Büschels (g_{ik}, R^3_{ik}).

Denn die den beiden Doppelstrahlen zugeordneten Flächen in (g_{ik}, R^3_{ik}) müssen von ein und derselben Ebene in P_i und zugleich in P_k berührt werden, können also nur Kegel sein.

Wir haben hiermit eine zweite Art von Systemen von zerfallenden Kegeln K^3 *erhalten, deren jedes einem Ebenenbüschel* g_{ik} *entspricht. Es gibt 28 solcher Systeme, da 28 Geraden* g_{ik} *vorhanden sind. Die sich von diesen Kegeln* K^3 *ablösenden Ebenen sind aber nur in endlicher Zahl — 28 — vorhanden, da alle* K^3, *welche Ebenen desselben Büschels* g_{ik} *entsprechen, dieselbe Ebene enthalten, nämlich die der Kurve* (g_{ik}, R^3_{ik}) *entsprechende.*

ε). *Geht* ε *endlich durch 3 Grundpunkte* P_i, P_k und P_l, so wird sie in jedem derselben von einer F^2 von N berührt. *Der entsprechende* K^3 hat dann die diesen 3 Flächen $F^2(\varepsilon)_i$, $F^2(\varepsilon)_k$, $F^2(\varepsilon)_l$ zugeordneten Strahlen zu Doppelkanten, *muss also in 3 Ebenen zerfallen*, nämlich in die, welche die 3 Strahlen untereinander verbinden. *Solche in 3 Ebenen zerfallende Kegel* K^3 *gibt es* $\frac{8.\ 7.\ 6.}{1.\ 2.\ 3.} = 56$.

14 a). Wir kommen jetzt auf den in 4. behandelten Kegel zurück. Er wird gebildet von den Strahlen, deren entsprechende F^2 Kegel sind. Seine Tangentialebenen sind mithin eindeutig zugeordnet den Charakteristiken der Enveloppe sämtlicher Kegel des Netzes. Nun ist die Enveloppe der

Kegel eines Netzes 2. Ordnung eine Fläche 24. Ordnung, welche gebildet wird von den Grundkurven des Netzes mit je einem Doppelpunkt, und diese sind Charakteristiken auf ihr. (Flächennetz 2. O. Nr. 25). *Daraus folgt, dass der Kegel der Strahlen, deren entsprechende* F^2 *Kegel sind, als Tangentialebenengebilde identisch ist mit dem Kegel, dessen umhüllende Ebenen den Grundkurven mit je einem Doppelpunkt zugeordnet sind.* Jede Tangentialebene hat ausser der Berührungskante noch 2 Kanten mit diesem K^4_{12} gemein. Der Berührungskante ist der Kegel zugeordnet, der den Doppelpunkt der ihrer zugehörigen Tangentialebene entsprechenden R^4 zur Spitze hat. In diesem vereinigen sich ja 2 Kegel des betreffenden Büschels (Nr. 13 b. β.); die beiden anderen Schnittkanten sind den beiden anderen Kegeln in diesem Büschel zugeordnet.

Wie aus dem vorangehenden Abschnitt (13.) hervorgeht, kann dieser Kegel K^4_{12} auch aufgefasst werden als Ort der Doppelkanten der Kegel K^3, welche den Tangentialebenen der Kegel von N zugeordnet sind, und als Ort der Ebenen, welche den zerfallenden unter diesen K^3 zugehören.

b). Für den K^4_{12} sind bekanntlich, da er ein allgemeiner Kegel 4. Ordnung ist,

$$r' = 24$$

und

$$d' = 28$$

die einzigen Singularitäten.

Die 28 Doppeltangentialebenen sind den 28 Grundkurven mit je zwei Doppelpunkten zugeordnet, den zerfallenden Grundkurven von N, ihre je 2 Berührungskanten den je 2 Kegeln, deren Spitzen die Doppelpunkte sind, den einzigen beiden in einem solchen Büschel.

Den 24 Wendetangentialebenen entsprechen die 24 Grundkurven in N, *die einen Rückkehrpunkt besitzen.* Dass eine solche Ebene mit dem K^4_{12} 3 vereinigte Kanten gemein hat, entspricht dem Umstand, dass in dem Büschel der zugeordneten Grundkurve 3 Kegel sich vereinigen in dem, dessen Spitze der Rückkehrpunkt ist. (Flächennetz 2. O. Nr. 42).

15 a). Der Kegel in 5. wurde gebildet von den Strahlen, die ihre entsprechenden Flächen berühren. Die Klasse dieses Kegels lässt sich leicht aus seiner Ordnungszahl bestimmen, da er weder Doppel- noch Rückkehrkanten haben kann.

Eine Doppelkante müsste nämlich mit der entsprechenden Fläche zweimal 2 vereinigte Punkte, also im ganzen 4 Punkte, eine Rückkehrkante einmal 3 vereinigte Punkte, also im ganzen 3 Punkte gemeinsam haben. Eine Doppel- oder Rückkehrkante müsste daher ganz auf der entsprechenden Fläche liegen. Solche Strahlen gibt es aber nicht in S. Denn die Flächen, welche ihre entsprechenden Strahlen enthalten, müssten dem Büschel $R^4(S)$ angehören.

Dem ist eine Bündelebene σ_0 zugeordnet, in der allein die fraglichen Strahlen liegen könnten. Ferner müssten sie als Geraden, welche auf Flächen des Netzes liegen, dem Komplexe 3. Grades dieser Geraden angehören, und zwar als Bündelstrahlen dem Komplexkegel 3. Ordnung aus S. Es kommen also nur die 3 Schnittlinien dieses Komplexkegels mit σ_0 in Betracht: $s_{0;1}$, $s_{0;2}$, $s_{0;3}$.

Nehmen wir eine von den 3, etwa $s_{0;1}$, so hat sie, weil in σ_0, zur entsprechenden Fläche eine F^2 von $\mathfrak{B}(S)$, weil auf dem Komplexkegel gelegen, so gehört sie einer Fläche des Netzes an, und zwar natürlich einer F^2 von $\mathfrak{B}(S)$. Aber die fällt nicht mit der entsprechenden F^2 zusammen. Also gehört $s_{0;1}$ nicht der eutsprechenden Fläche an, ebenso nicht $s_{0;2}$ und $s_{0;3}$.

Hiermit ist erwiesen, dass

$$d = r = 0.$$

Der Kegel ist daher allgemein, also

$$n' = 12,\ r' = 24,\ d' = 28.$$

Die Bedeutung der Tangentialebenen unseres Kegels lässt sich leicht erkennen. Die Kanten sind die Tangenten von P aus an die durch die Schnittpunkte entsprechender Strahlen und Flächen in S und N erzeugte Fläche, und zwar die ausserhalb S berührenden Tangenten der Fläche. S selbst ist ja ein Punkt der Fläche (Nr. 5).

Bekanntlich sind nun die Tangentialebenen des Kegels, der von den aus einem Punkte an eine Fläche gehenden Tangenten gebildet wird, die Tangentialebenen von diesem Punkte an die Fläche; ihre Berührungspunkte fallen zusammen mit den Berührungspunkten der in ihnen liegenden Berührungskanten. *Unser Kegel* K^4_{12} *wird also umhüllt von den von* S *aus an die erzeugte Fläche gelegten Tangentialebenen mit von* S *getrennten Berührungspunkten*, oder, wie wir auch sagen können, von den Bündelebenen, in denen die erzeugte C^3 einen von S getrennten Doppelpunkt besitzt; denn die Schnittkurve einer Tangentialebene einer Fläche mit dieser hat im Berührungspunkt einen Doppelpunkt.

b). Die Doppeltangentialebenen unseres Kegels sind die von S ausgehenden Doppeltangentialebenen der erzeugten Fläche F oder die, deren Schnittkurve C^3 mit ihr 2 Doppelpunkte besitzt, also zerfällt, in eine Gerade und einen Kegelschnitt, welche beide der Fläche angehören. Die Doppeltangentialebenen unseres Kegels verbinden also S mit je einer Geraden der F. Umgekehrt ist jede Bündelebene σ, welche eine Gerade der F enthält, Doppeltangentialebene des K^4_{12}. Denn in einer solchen σ spaltet sich von der Schnittkurve C^3 mit der F eine Gerade ab. Es bleibt dann ein Kegelschnitt übrig, der die Gerade zweimal trifft, sodass die gesamte C^3 zwei Doppelpunkte hat. *Eine Ebene* σ, *welche eine Gerade der* F *enthält, ist also Doppeltangentialebene der* F, *und mithin auch des* K^4_{12}.

Ausser den so zustande kommenden doppelten Berührungsebenen des K^4_{12} *gibt es noch eine andere, nämlich die Berührungsebene der* F *in* S: $\overline{\sigma}$.

Die hat, wie jede Ebene, mit K^4_{12} 4 Kanten gemein. Das sind als Geraden der Ebene σ Tangenten der F in S, als Geraden des K^4_{12} anderwärts berührende Tangenten der F. Die einzigen Bündelstrahlen in der Tangentialebene in S,σ, die sich als anderwärts berührende Tangenten auffassen lassen, sind die beiden Tangenten in S an die beiden Zweige der Schnittkurve von $\overline{\sigma}$ mit F. Dies sind daher die einzigen

Geraden, welche σ mit K^4_{12} gemein hat, und da sie gleichartig sind, so zählt jede als doppelte Schnittlinie, d. h. σ ist Doppeltangentialebene von K^4_{12} (Doppelkanten sind ja nicht vorhanden).

Wir schliessen, dass auf die andere Art 27 doppelte Berührungsebenen zustande kommen, d. h. nach dem Obigen, dass F 27 Geraden enthält.

Die 24 Wendeberührungsebenen sind Ebenen, deren C^3 *einen Rückkehrpunkt besitzt.*

Dieser K^4_{12} wird später (Nr. 19) noch einmal in ein facherer Weise betrachtet werden.

16a). Bei dem Kegel in Nr. 10., der umhüllt wird von den Ebenen, die ihre entsprechenden R^4 berühren, sind zunächst die Wendetangentialebenen von Interesse; dies sind die Ebenen in S, welche ihre zugeordneten R^4 osculieren.

α). Um deren Zahl festzustellen, legen wir in S eine Korrespondenz zugrunde.

Denken wir uns den Bündel doppelt, und gehen wir von einer Ebene ξ des ersten Bündels aus, so wird diese, wie jede Ebene des Raumes, von 9 Grundkurven von N osculiert. (Flächennetz 2. O. Nr. 11). Die 9 diesen R^4 zugeordneten Ebenen ξ' ordnen wir der ξ zu. Einer Ebene ξ' entsprechen dann die von S ausgehenden Schmiegungsebenen der entsprechenden R^4. Deren Zahl, die Klasse einer R^4, ist bekanntlich 12. (Vgl. Sturm, Synthetische Untersuchungen über Flächen 3. Ordnung, Nr. 56).

Es handelt sich jetzt noch um den Grad dieser Bündelkorrespondenz, d. h. um die Klasse des Kegels in einem der beiden Bündel, dessen Tangentialebenen den Ebenen eines Büschels im anderen entsprechen. Es ist ja hierbei bekanntlich gleichgültig, von welchem Bündel wir ausgehen, da die Gradzahl die Anzahl von Malen ist, wie oft 2 beliebige Strahlen der beiden Bündel Paare entsprechender Ebenen enthalten.

Lassen wir eine Ebene im zweiten Bündel einen Büschel s durchlaufen, so bewegt sich die ihr in der Bündel-Netz-Korrelation zugeordnete R^4 auf einer F^2, der F^2_s. Die Klasse

des dem Ebenenbüschel in der Bündelkorrespondenz zugeordneten Kegels ist also die Zahl der Osculationsebenen von R^4 auf der F^2_s, die durch einen beliebigen Strahl t seiner Spitze S laufen. Dieser zugeordnete Kegel ist der Tangentialkegel aus S an die von den erwähnten Osculationsebenen gebildete Fläche F_o, so dass also seine Klasse zugleich die Klasse der F_o ist, und wir an Stelle der t eine beliebige Gerade g einsetzen können.

Da zu jeder Fläche des Netzes eine solche Fläche F_o gehört, so wollen wir an Stelle der F^2_s eine beliebige Fläche des Netzes, $\bar{F}^2$, einführen, um volle Allgemeinheit zu erzielen.

Wir haben es also mit folgendem allgemeinen Problem zu tun:

Es liegt eine Fläche 2. Ordnung $\bar{F}^2$ vor, die einem gegebenen Netze N angehört.

Welche Fläche wird von den Schmiegungsebenen aller auf F^2 *gelegenen Grundkurven, deren Gesamtheit wir als Büschel von Grundkurven bezeichnen wollen, gebildet?*

β). Die Osculationspunkte von Ebenen des Büschels g mit Grundkurven von $\bar{F}^2$ fallen unter die Berührungspunkte dieser Ebenen mit jenen Grundkurven, also jedenfalls auch unter die gemeinsamen Punkte von Ebenen durch g mit den Grundkurven von $\bar{F}^2$, welche sie berühren.

Jede Ebene, also auch jede von g, wird von 6 Grundkurven R^4 eines Büschels berührt, wie in 8. gezeigt worden ist. Es liegen also in ihr 6 Berührungspunkte mit R^4 des gegebenen Büschels auf $\bar{F}^2$ und 2 weitere Schnittpunkte mit jeder der 6 Grundkurven, also im ganzen 12 solche weitere Punkte. Lassen wir die Ebene den Büschel g durchlaufen, so erfüllen die 18 erwähnten Punkte in ihr eine Raumkurve R. Diese wollen wir nun betrachten.

Jeder Punkt P von R ist einer R^4 des gegebenen Grundkurvenbüschels gemeinsam mit einer Ebene durch g, welche diese berührt, kann also nur auf $\bar{F}^2$ liegen. Suchen wir also die Punkte P der R in einer Ebene ε, so kommen

nur die Punkte der Schnittkurve von ε mit $\overline{F}^2$ in Betracht, eines Kegelschnittes C^2_ε.

Ein beliebiger Punkt Q von C^2_ε bestimmt eine R^4, die auf $\overline{F}^2$ liegt. Sie wird von 8 Ebenen des Büschels g berührt, weil 8 ihr Rang ist. (Nr. 10). Jede von den 8 Ebenen schneidet C^2_ε in 2 Punkten Q'. Die 16 Q', die wir so auf C^2_ε erhalten, ordnen wir dem Q zu. Von einem Q' gelangen wir dann folgendermassen zu den entsprechenden Q:

Q' bestimmt eine Ebene aus g, diese wird von 6 Grundkurven der $\overline{F}^2$ berührt, und diese 6 schneiden je 4 Punkte in ε, d. h. auch in C^2_ε ein, im ganzen also 24 Punkte. Das sind die gesuchten Punkte Q.

Wir haben somit auf C^2_ε eine Korrespondenz [24,16] erhalten. Da der Kegelschnitt unikursal ist, so gibt es 40 Koinzidenzen. Weil nun entsprechend auf C^2_ε 2 solche Punkte sind, von denen einer auf einer R^4 liegt, der andere auf einer Ebene aus g, welche diese berührt, so ist jeder Koinzidenzpunkt gemeinsamer Punkt einer solchen R^4 mit einer derartigen Ebene, also Punkt der R.

Umgekehrt ist jeder Schnittpunkt von R mit ε Koinzidenzpunkt in unserer Korrespondenz auf C^2_ε.

Hiermit haben wir erkannt:

Die Kurve der gemeinsamen Punkte von Grundkurven R^4 *eines Büschels* $\overline{F}^2$ *mit Ebenen eines Büschels* g, *welche sie berühren, hat die Ordnung 40*: R^{40}.

Auf R^{40} liegen die Grundpunkte P_i von N, die wir auch Grundpunkte des R^4-Büschels nennen können.

Legen wir nämlich durch P_i eine Ebene ξ, so erhalten wir ihre Schnittpunkte mit R^{40}, wenn wir auf C^2_ξ die vorhin beschriebene Korrespondenz herstellen. Die 16 Punkte Q', welche einem festen Punkt Q entsprechen, haben allgemeine Lage auf C^2_ξ; von den 24 Punkten Q einer Gruppe fallen aber 6 in P_i, jede der 6 Kurven R^4, die in Betracht

kommen, geht ja einmal durch P_i; es bleiben dann 18 von P_i getrennte Punkte Q übrig, und nur diese wollen wir in die Korrespondenz aufnehmen. Es handelt sich dann um eine Korrespondenz [18,16]. Deren 34 Koinzidenzen sind die Punkte, welche R^{40} ausser P_i mit ξ gemein hat. Hiermit ist erkannt, da ξ eine beliebige Ebene durch P_i war, dass P_i sechsfach ist auf R^{40}.

Die Kurve R^{40} zerfällt in 2 Bestandteile, die Kurve der Berührungspunkte von Ebenen aus g mit R^4 auf $\bar{F}^2$ und die Kurve der weiteren Schnittpunkte dieser R^4 mit jenen Ebenen, die wir für den Augenblick mit R_I und R_{II} bezeichnen wollen.

Es soll nun zunächst die Ordnung von R_I abgeleitet werden.

In einem Punkte P von R_I wird eine R^4 von $\bar{F}^2$ von einer Ebene aus g berührt. Fällt P weder in einen Grundpunkt, noch auf g, so kann es sich nur um eine R^4, die $R^4(P)$, und eine Ebene durch g handeln, die Ebene π, welche P mit g verbindet. P ist Punkt der Jacobischen Kurve J_π, des in π eingeschnittenen Kegelschnittnetzes, wie wir kurz sagen wollen, Punkt der Jacobischen Kurve von π weil π in P von $R^4(P)$ berührt wird, liegt also auf der Fläche F_J, welche von den Jacobischen Kurven aller Ebenen des Büschels g erzeugt wird, und ferner auf $\bar{F}^2$, mithin ist P ein gemeinsamer Punkt dieser beiden Flächen.

Ist umgekehrt P ein solcher gemeinsamer Punkt, der wiederum weder ein Grundpunkt P_i ist, noch auf g fällt, so ist er, weil auf F_J gelegen, Punkt der Jacobischen Kurve in der einzigen durch ihn gehenden Ebene aus g, der $\bar{\pi} \equiv (Pg)$; also wird π in P von einer R^4, natürlich der $R^4(P)$, berührt; und weil P auf $\bar{F}^2$ liegt, so auch $R^4(\bar{P})$. $\bar{P}$ ist also Berührungspunkt einer Ebene aus g mit einer R^4 auf $\bar{F}^2$, liegt also auf R_I.

Hiermit ist dargetan, dass R_I die volle Schnittkurve von $\bar{F}^2$ mit F_J ist. Um also die Ordnung von R_I zu erkennen, brauchen wir nur die Ordnung von F_J abzuleiten.

γ). Die Jacobische Kurve einer Ebene ist ihre Schnittkurve mit ihrer kubischen Polfläche in Bezug auf das Netz N. (Flächennetz 2. O. Nr. 10). Die kubischen Polflächen aller Ebenen gehen durch die Kegelspitzenkurze C_K von N; ferner geht die kubische Polfläche einer Ebene durch die kubischen Polkurven aller ihrer Geraden. (Sturm, Synthetische Untersuchungen über Flächen 3. Ordnung, Nr. 16).

Daraus folgt, dass die kubischen Polflächen der Ebenen eines Büschels ausser der Kegelspitzenkurve von N die kubische Polkurve der Axe des Büschels gemeinsam haben, also alle die nämliche Kurve 9. Ordnung, d. h., dass sie einen Büschel bilden.

Die Elemente des Ebenen- und des kubischen Büschels sind einander eineindeutig zugeordnet. Jede Ebene hat eine kubische Polfläche in Bezug auf N(F), wie aus der Bedeutung derselben hervorgeht.

Jede Fläche des kubischen Büschels ist nur zu einer Ebene des Ebenenbüschels Polfläche, wegen der Eineindeutigkeit der Beziehung zwischen konjugierten Punkten.

Nun erzeugen zwei Flächenbüschel n_1^{ter} und n_2^{ter} Ordnung in eineindeutiger Beziehung ihrer Elemente durch die Schnittkurven entsprechender Flächen eine $F^{n_1+n_2}$, welche die Grundkurven beider Büschel enthält. (Vgl. Sturm, die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften III,671).

In unserem Falle entsteht eine F^4; auf ihr liegen g die kubische Polkurve von g in Bezug auf N und die Kegelspitzenkurve von N.

Es ist also die von den Jacobischen Kurven des Büschels g erzeugte Fläche von der 4. Ordnung. Ihre Schnittkurve mit einer Ebene durch g besteht aus g und deren Jacobischer Kurve.

Da g eine beliebige Gerade ist, so gilt allgemein:

Die Jacobischen Kurven der Kegelschnittnetze, welche von den Ebenen eines Büschels aus einem Flächennetze ausgeschnitten werden, erzeugen eine Fläche 4. Ordnung, welche die Axe des Büschels enthält.

δ). Es folgt in unserm Falle, dass die R_I als Schnittkurve der $\bar{F}^2$ und der eben behandelten F^4 eine Kurve 8. Ordnung ist.

Als Bestandteil der R^{40} zählt sie doppelt, sodass also R_{II} die Ordnung 24 hat.

Wir können die beiden Ordnungszahlen bestätigen, indem wir die Sehnittpunkte der beiden Kurven R^8 und R^{24} mit einer Ebene ξ durch g aufsuchen.

ξ hat mit R^8 zunächst die 6 erzeugenden Punkte der R^8 in ihr gemein, ferner 2 auf g gelegene Punkte, welche erzeugende Punkte in anderen Ebenen sind. g trifft nämlich $\bar{F}^2$ in 2 Punkten, S_1 und S_2. Die durch S_1 bestimmte Grundkurve, die $R^4(S_1)$, hat in S_1 eine Tangente, welche g in S_1 trifft und daher eine Ebene aus g enthält. Diese Ebene berührt $R^4(S_1)$ in S_1. Da nun $R^4(S_1)$ auf $\bar{F}^2$ liegt, so ist S_1 auf R^8 gelegen, und zwar, wie aus der vorangehenden Betrachtung hervorgeht, einfach.

Dasselbe gilt für S_2.

S_1 und S_2 liegen also beide einfach auf R^8. Sie sind die beiden weiteren Schnitte von ξ mit R^8.

Die 6 Kurven R^4, welche ξ berühren, treffen ξ noch in je 2 weiteren Punkten, also im ganzen in 12 Punkten ausser den 6 Berührungspunkten. Diese 12 sind die erzeugenden Punkte der R^{24} in ξ.

Ferner wird $R^4(S_1)$ von 6 Ebenen aus g ausserhalb S_1 berührt, weil 6 Tangenten ausser der in S_1 die g treffen (Nr. 12). Diese 6 Ebenen haben mit ihr den S_1 gemeinsam, sodass S_1 erzeugender Punkt der R^{24} in 6 Ebenen des Büschels g ist, also 6fach auf R^{24}; ebenso S_2. So kommen die $12 + 12 = 24$ Punkte der R^{24} in ξ zustande.

Gleichzeitig haben wir erkannt, dass S_1 und S_2 Schnittpunkte der beiden Raumkurven sind, und zwar zählen sie, da S_k ($k = 1,2$) auf R^8 einfach, auf R^{24} 6fach liegt, für je 6, im ganzen also für 12 Schnittpunkte.

Die Grundpunkte P_i sind ebenfalls Schnittpunkte von R^8 und R^{24}. Auf R^8 liegen sie einfach; denn P_i ist Be-

rührungspunkt einer R^4 von F^2 mit einer Ebene von g. Die Tangenten in P_i nämlich an die einfach unendlich vielen R^4 des gegebenen Büschels, die ja durch ihn gehen, bilden den Strahlenbüschel um P_i in der Tangentialebene an $\overline{F}^2$ in P_i. Eine von ihnen trifft also g, und diese liefert in ihrer Verbindungsebene π_i mit g die eine Ebene des Büschels g, welche in P_i von einer R^4 der F^2 berührt wird. P_i liegt daher einfach auf R^8. Weil nun R^8 doppelt zählt als Bestandteil der R^{40}, so kommen durch sie die Grundpunkte je 2 fach auf die R^{40}, und da sie im ganzen auf der R^{40} je 6 fach liegen, so sind sie je 4 fach auf R^{24}.

Dieses letztere können wir bestätigen.

Die 6 Grundkurven einer F^2, welche eine Ebene η berühren, tun dies in den 6 gemeinsamen Punkten der Jacobischen Kurve des in diese eingeschnittenen Kegelschnittnetzes mit dem Kegelschnitt, den η mit der F^2 gemein hat. (Nr. 8).

Die Ebene π_i, welche g mit P_i verbindet, hat eine Jacobische Kurve J_{π_i}, auf der P_i Doppelpunkt ist. Denn es besteht der allgemeine Satz:

Wenn ein Kurvennetz einen Grundpunkt hat, — P_i ist ja Grundpunkt für $N(C^2)$, — so ist dieser Doppelpunkt für die Jacobische Kurve des Netzes. (Sturm, die Lehre von den geometrischen Verwandschaften III,686).

Der Kegelschnitt, den π_i mit F^2 gemein hat, $C^2_{\pi_i}$, trifft J_{π_i} in P_i, der doppelt zählt als Schnittpunkt, ausserdem noch in 4 anderen Punkten. Daher gibt es 4 R^4 auf $\overline{F}^2$, die π_i ausserhalb P_i berühren, die in P_i berührende zählt doppelt unter den 6 im ganzen vorhandenen.

Hiermit ist bestätigt, dass P_i 4 fach ist auf R^{24}.

Die Grundpunkte zählen also für je 4 Schnittpunkte, im ganzen daher für 32 Schnittpunkte der R^8 und R^{24}.

Es hat sich also ergeben:

Die Kurve R^{40} *zerfällt in zwei Bestandteile, eine* R^8, *die doppelt zählt hierbei, und eine* R^{24}. *Die* R^8 *ist der Ort*

der Berührungspunkte von Ebenen des Büschels g *mit Grundkurven auf* $\bar{F}^2$, *die* R^{24} *der Ort der weiteren Schnittpunkte von zwei solchen Elementen.*

Beide Kurven haben die Treffpunkte von g *mit* $\bar{F}^2$ *und die Grundpunkte von* N *gemeinsam.*

Wir kehren nun zu der ursprünglichen Frage zurück, der nach der Zahl der Ebenen des Büschels g, welche Grunkurven R^4 des Büschels auf $\bar{F}^2$ osculieren.

Jeder solche Osculationspunkt O einer Ebene aus g, der $\omega \equiv (Og)$, mit einer Grundkurve von $\bar{F}^2$, der R^4 (O), muss natürlich dər R^8 angehören, weil er ja zu den Berührungspunkten dieser Ebenen mit jenen R^4 zählt. Weil aber in O noch ein weiterer Schnittpunkt der Ebene ω mit R^4 (O) fällt, so liegt er auch auf der R^{24}. Mithin sind die Punkte O den beiden Raumkurven gemeinsam. Da diese beiden auf der $\bar{F}^2$ liegen, und R^8 in $\bar{F}^2$ drrch eine Fläche 4. Ordnung eingeschnitten wird, so sind die gemeinsamen Punkte der R^{24} mit der R^8 zugleich die Schnittpunkte der R^{24} mit der Fläche 4. Ordnung, welche R^8 in $\bar{F}^2$ einschneidet.

Mithin sind 96 gemeinsame Punkte der R^8 *und* R^{24} *vorhanden.*

Die Zahl 96 können wir bestätigen. Legen wir an $\bar{F}^2$ eine Tangentialebene τ, so trifft diese die R^8, wie jede Ebene, in 8 Punkten, welche auf die Schnittkurve der τ mit $\bar{F}^2$, ein Geradenpar, (t_1, t_2), fallen. Da nun R^8 offenbar unabhängig von den Geraden der beiden Regelscharen auf $\bar{F}^2$ ist, so verhält sie sich gleichartig gegen die Geraden der beiden Scharen Es fallen also auf jede der beiden Geraden t_1, t_2 des Paars 4 Schnittpunkte der R^8 mit τ. Drehen wir τ um t_1, so erfüllt t_2 eine der beiden Scharen auf $\bar{F}^2$, und auf jede Gerade dieser Schar kommen 4 Schnittpnnkte mit R^8 zu liegen, da die 4 auf t_1 fest bleiben; drehen wlr dann die Tangentialebene um eine Lage der Geraden t_2, so durchläuft t_1 die andere Schar, und da die 4 Schnittpunkte, auf t_2 festbleiben, so kommen auf jede Gerade t_1 wieder 4 Schnitt-

punkte. R^8 trifft also alle Geraden der einen Schar ebenso wie alle Geraden der anderen Schar in je 4 Punkten.

Ebenso erkennen wir, dass R^{24} die Geraden der einen und anderen Schar je in 12 Punkten trifft.

Wenn nun aber auf der Trägerfläche zweier verbundenen Regelscharen zwei Raumkurven von den Ordnungen $n+n_1$, $n'+n_1'$ verlaufen, welche die Geraden der einen Schar in n bezw. n′ Punkten treffen, die der anderen in n_1 bezw. n_1' Punkten, so haben sie $n.n_1' + n_1.n'$ gemeinsame Punkte. (Sturm. Die Lehre von den geometrischen Verwandschaften I. 165.) In unserem Falle ergibt sich $4 . 12+4 . 12 = 96$ für die Zahl der Schnittpunkte.

Aber nicht alle diese gemeinsamen Punkte sind Osculationspunkte O. Zu den gemeinsamen Punkten gehören, wie wir gesehen haben, die Punkte S_k und die Grundpunkte P_i.

Ferner kann es vorkommen, dass der 3. und 4. Schnittpunkt einer Ebene aus g mit einer von ihr berührten R^4 von $\bar{F}^2$ auch noch sich vereinigen, sodass also diese Ebene jene R^4 doppelt berührt. Betrachten wir ein solches Paar aus den Büscheln g und $\bar{F}^2$, etwa mit den gemeinsamen Punkten U und V. Da U Berührungspunkt der beiden Elemente ist, so stellt V 2 weitere Schnittpunkte dar, liegt also auf R^{24}, als Berührungspunkt der beiden Elemente aber auf R^8, ist also der R^8 und R^{24} gemeinsam. Ebenso können wir von V ausgehen und gelangen dazu, dass U gemeinsamer Punkt von R^8 und R^{24} ist. Jede Ebene, welche eine R^4 der $\bar{F}^2$ doppelt berührt, führt also in den beiden Berührungspunkten zu 2 gemeinsamen Punkten der beiden Kurven.

Wenn nun ein gemeinsamer Punkt P von R^8 und R^{24} ausser den betrachteten, S_k, P_i, U, V, vorhanden ist, so bestimmt er, weil er nicht Grundpunkt ist, *eine* R^4, die $R^4(P)$, welche, weil P es tut, auf $\bar{F}^2$ liegt, und die $R^4(P)$ wird in P von einer Ebene π von g berührt, da ja P auf R^8 liegt. Nun gibt es, weil P der g nicht angehört, nur *eine* solche Ebene π.

P muss ferner, weil er auf R^{24} liegt, gemeinsamer Punkt einer R^4 mit einer Ebene von g sein, die sie anderwärts berührt. Weil aber $R^4(P)$ die einzige Grundkurve ist, welche durch P geht, und π die einzige Ebene durch g, welche ihn enthält, so kann es sich nur um dieselben beiden Elemente, wie vorhin, handeln. P könnte also nur Berührungspunkt einer Ebene mit einer R^4 sein, die einander doppelt berühren, oder Osculationspunkt. Da wir die Punkte der ersten Art hier nicht berücksichtigen, so ist P Osculationspunkt.

Für die gemeinsamen Punkte der anderen Arten gilt das nicht.

Durch den Punkt P_i gehen ∞^1 viele R^4 der $\bar{F}^2$; die Ebene $\pi_i \equiv (P_i g)$, die sie alle in P_i trifft, berührt eine von ihnen in P_i, 4 andere anderwärts, aber diese 5 Kurven R^4, welche π_i berühren, sind alle von einander verschieden, so dass nicht auf Osculation geschlossen werden kann.

S_k beistimmt *eine* R^4, die $R^4(S_k)$. Sie wird von 7 Ebenen des Büschel g berührt, von einer in S_k, von 6 anderen anderwärts. Da die 7 Ebenen aber alle von einnander verschieden sind, so findet ebenfalls Osculation nicht statt.

Die gemeinsamen Punkte endlich einer Ebene des Büschels g mit einer R^4, welche sie doppelt berührt, fallen zu je zweien zusammen, nie aber 3, da sonst alle 4 mit einander vereinigt sein müssten. Vierpunktig berührende Schmiegungsebenen des gegebenen Grundkurvenbüschels gehen aber durch g nicht; denn jede R^4 besitzt 16 solche Schmiegungsebenen, die aller R^4 von $\bar{F}^2$ bilden daher einen Torsus.

Wir kommen also zur Zahl der gesuchten Osculationspunkte, wenn wir von der Gesamtzahl der Schnittpunkte von R^8 und R^{24} die Zahlen der Grundpunkte P_i, der Punkte S_k und der Berührungspunkte von Elementen der beiden gegebenen Gebilde, die einander doppelt berühren, abziehen, je mit der gehörigen Vielfachheit. Die Zahlen der Vielfachheit der Punkte P_i und S_k als Schnittpunkte der beiden Raumkurven kennen wir. Es handelt sich noch um die Punkte der dritten Art.

ε) Um ihre Zahl zu ermitteln, müssen wir die Anzahl der Ebenen durch g bestimmen, welche Grundkurven der $\overline{F}^2$ doppelt berühren.

Die Ebenen, welche eine Raumkurve doppelt berühren, bilden einen Torsus. Für eine Grundkurve R^4 besteht dieser Torsus bekanntlich aus den Tangentialebenen der 4 Kegel 2. Ordnung, welche sie projicieren. Lassen wir R^4 die $\overline{F}^2$ durchlaufen, so bilden die Tangentialebenen der zugehörigen Torsen eine Fläche F. Die Zahl der Tangentialebenen dieser F durch eine Gerade ist ihre Klasse. Diese Tangentialebenen aus g sind die gesuchten doppelt berührenden Ebenen durch g.

Für den Büschel der R^4 auf $\overline{F}^2$ erhalten wir ∞^1 viele Gruppen von je 4 Kegeln 2. Ordnung, und zwar sind dies alle Kegel des Netzes, da ja jeder Kegel von N in $\overline{F}^2$ eine R^4 einschneidet. F wird also umhüllt von den Tangentialebenen sämtlicher Kegel des Netzes. Damit eine Gerade eine Tangentialebene eines solchen Kegels enthält, muss sie entweder durch seine Spitze gehen oder ihn berühren.

Eine beliebige Gerade wird von der Kegelspitzenkurve nicht getroffen, hingegen, wie früher abgeleitet, (No. 6 oder Flächennetz 2. O. Nr. 45) von 8 Kegeln des Netzes berührt. Von jedem dieser 8 Kegel enthält sie dann eine Tangentialebene, sodass 8 die Klasse unserer Fläche ist.

Wir haben also erkannt:

Die Ebenen, welche Grundkurven von N *doppelt berühren, umhüllen eine Fläche 8. Klasse.*

ζ). Es gehen also auch durch g 8 Tangentialebenen der F, d. h. 8 Ebenen, welche Grundkurven der F^2 doppelt berühren. Da jede solche Ebene zu zwei gemeinsamen Punkten der R^8 und R^{24} führt, so erhalten wir daher im ganzen 16 Schnittpunkte der R^8 und R^{24} der dritten Art, so dass die Zahl der Osculationspunkte

$$96 - 2 \cdot 6 - 8 \cdot 4 - 16 = 36$$

ist. Diese 36 Punkte fallen zu je zweien zusammen, so dass sie 18 Berührungspunkte der beiden Raumkurven bilden;

denn in jedem von diesen 36 restierenden Punkten fallen 3 Schnittpunkte Q_1, Q_2, Q_3 einer Ebene aus g mit einer Grundkurve der F^2 zusammen, und dies können wir so auffassen, dass der mittlere Q_2 sich mit jedem der beiden äusseren Punkte Q_1 und Q_3 je einmal vereinigt hat, und der andere äussere dann ausserdem noch hineinkommt. Es hat also jeder der 36 Punkte einen weiteren von ihnen unendlich nahe bei sich. (Einen ähnlichen Schluss s. Sturm: Erzeugnisse, Elementarsysteme und Charakteristiken von cubischen Raumkurven. Crelles Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 79 No. 5.)

Die 36 zuletzt betrachteten gemeinsamen Punkte der beiden Kurven führen also zu 18 Berührungspunkten der beiden Kurven und in ihnen zu den gesuchten Osculationspunkten.

Es hat sich also ergeben:

Die Fläche, welche gebildet wird von den Osculationsebenen der R^4 *eines gegebenen Grundkurvenbüschels, hat die Klasse 18.*

Mithin ist 18 auch die Klasse ihres Tangentialkegels aus einem beliebigen Punkte, also auch aus S, d. h., wie am Anfang dieses Abschnitts (16) gezeigt worden ist, der Grad unserer Bündelkorrespondenz [12,9].

7.) In einer Bündelkorrespondenz $[n_1, n_2]$ vom Grade m gibt es nach dem Korrespondenzprinzip in der Ebene oder im Bündel (Sturm, Liniengeometrie I No. 32, oder: Die Lehre von den geometrischen Verwandschaften IV. § 123.) n_1+n_2+m Koinzidenzebenen, in unserem Falle sind also $12+9+18=39$ Koinzidenzebenen vorhanden.

Jede solche Ebene wird als Ebene des ersten Bündels von 9 Grundkurven osculiert, als enstprechende Ebene des zweiten Bündels ist sie einer der sie osculierenden R^4 zugeordnet, sodass also jede Koinzidenzebene von ihrer entsprechendon R^4 osculiert wird.

Da umgekehrt jede Ebene, welche von ihrer entsprechenden R^4 osculiert wird, Koinzidenzebene in unserer

Bündelkorrespondenz sein muss, so ist durch das Vorangegangene erwiesen:

In S *sind 39 Ebenen vorhanden, welche ihre entsprechenden* R^4 *osculieren. Es sind die Wendeberührungsebenen des Kegels 14. Klasse, dessen einhüllende Ebenen ihre zugeordneten* R^4 *berühren.*

b) Wir wollen noch die Zahl der Doppeltangentialebenen des K_{14} feststellen. Das sind die Ebenen, welche ihre entsprechenden Grundkurven doppelt berühren.

Zu unserm Zwecke betrachten wir zwei Kegel von S: den Kegel K_8, dessen einhüllende Ebenen Grundkurven des Netzes doppelt berühren, oder was dasselbe bedeutet, Tangentialebenen von Kegeln des Netzes sind, (Nr. 16a, ε) und den Kegel K^4 der Strahlen, deren entsprechende F^2 in N Kegel sind. K_8 und K^4 stehen in einer Korrespondenz [2, 1] ihrer Elemente. Denn eine Tangentialebene x von K_8 wird von *einem* Kegel des Netzes berührt; dessen entsprechender Strahl k, eine Kante von K^4, ist der x zugeordnet. Einer Kante k von K^4 entsprechen die beiden Tangentialebenen von S aus an den zugeordneten Kegel des Netzes.

Nun gilt der Satz:

Liegen zwei Kegel mit derselben Spitze von der Klasse n_1', bezw. Ordnung n_1 vor $K_{n_1'} + $ und K^{n_1}, und sind ihre Elemente so auf einander bezogen, dass jeder Tangentialebene von $K_{n_1'}$ eine Kante von K^{n_1}, jeder Kante von K^{n_1} p Tangentialebenen von $K_{n_1'}$ entsprechen, so sind $(n_1' + n_1 p)$ mal zwei entsprechende Elemente inzident. (Vgl. F. Kliem, Ueber Oerter von Treffgeraden entsprechender Strahlen in eindeutig und linear verwandten Strahlengebilden erster bis vierter Stufe; Diss. von Breslau, 1909 II (3.). Auch: Sturm, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften I Nr. 177, IV Nr. 842).

In unserm Falle, wo

$$n_1' = 8,\ n_1 = 4,\ p = 2,$$

gibt es 16 Paare entsprechender inzidenter Elemente.

Ist ρ, r ein solches Paar, so ist ρ Tangentialebene an den der r entsprechenden Kegel K_r von N; sie berührt also alle R^4 auf K_r doppelt. Weil nun ρ durch r geht, so muss die R^4_ρ auf K_r verlaufen, also von ρ doppelt berührt werden. Die Ebenen der 16 Paare ρ, r werden also von ihren entsprechenden Grundkurven doppelt berührt, und offenbar nur diese.

Es hat sich also ergeben:

Im Bündel S *gibt es 16 Ebenen, welche ihre entsprechenden Grundkurven berühren. Dies sind die Doppeltangentialebenen des Kegels 14. Klasse, dessen einhüllende Ebenen ihre zugeordneten* R^4 *berühren.*

Diese 16 Ebenen sind dem K_{14} und dem K_8 gemeinsam, der zur Ableitung des Satzes benutzt wurde. Sie erschöpfen aber nicht die Zahl 112 der gemeinsamen Tangentialebenen.

Bemerkenswert ist, dass wir zur Ableitung der Zahlen 39 und 16 der Osculations- und Doppeltangentialebenen des K_{14} uns ganz verschiedener Methoden bedient haben. Eine Bündelkorrespondenz in analoger Weise wie im ersten Fall festzulegen, gelingt im zweiten Falle nicht, da zwar jede Grundkurve von einer endlichen Anzahl von Bündelebenen doppelt berührt wird, nämlich von 8, den Tangentialebenen aus S an die 4 Kegel 2. Ordnung, welche sie projizieren, eine Bündelebene aber im allgemeinen von keiner Grundkurve. Nur ∞^2 Ebenen, die Tangentialebenen der Kegel des Netzes, und unter ihnen ∞^1 Bündelebenen, werden von Grundkurven doppelt berührt, und zwar jede von einfach unendlich vielen.

Wir kennen nunmehr für den Kegel K_{14} 3 Zahlen:

$$n' = 14,\ d' = 16,\ r' = 39.$$

Es folgt mit Hilfe der Plückerschen Formeln:

$$n = 33,\ r = 96,\ d = 377.$$

IV.

Die Systeme, welche die in 12. und 13. behandelten Oerter erfüllen, wenn die gegebene Gerade oder Ebene einen Büschel durchläuft.

Die in 4., 5., 9. und 10. behandelten Kegel sind isoliert im Bündel S vorhanden; hingegen die Kegel, deren jeder in dem erläuterten Sinne einer Geraden bezw. einer Ebene entspricht, sind in einer vierfach bezw. dreifach unendlichen Mannigfaltigkeit da, weil es eine vierfach bezw. dreifach unendliche Mannigfaltigkeit von Geraden bezw. Ebenen im Raume gibt.

Wir wollen hier nur den einfachsten und interessantesten Fall betrachten, das System von Kegeln, welches dem System der Geraden bezw. Ebenen eines einstufigen Ortes zugeordnet ist.

Einem Büschel $\mathfrak{B} = (B, \beta)$ von Geraden g entspricht ein einfach unendliches System von Kegeln: $M^1_{\mathfrak{B}}$. Es handelt sich um seine Charakteristiken μ, ν, d. h. um die Zahl der Kegel, welche durch einen festen Bündelstrahl s gehen, bezw. eine gegebene Bündelebene σ berühren.

Wenn in $M^1_{\mathfrak{B}}$ ein Kegel K^2_2 durch s geht, so muss die zugeordnete Gerade von K^2_2 in $\mathfrak{B}$ die F^2_s berühren, und umgekehrt. Da es in $\mathfrak{B}$ 2 Strahlen gibt, welche F^2_s berühren, die beiden Tangenten von B aus an den von F^2_s in β eingeschnittenen Kegelschnitt, so ist:

$$\mu = 2.$$

Die Kegel K^2_2 in $M^1_{\mathfrak{B}}$, welche σ berühren, sind diejenigen, deren entsprechende Geraden R^4_σ treffen.

R^4_σ hat 4 Punkte mit β gemein; also 4 Strahlen von $\mathfrak{B}$ treffen R^4_σ, die 4 nach diesen Punkten laufenden.

Mithin ist:

$$\nu = 4.$$

Die Kurve R^4 (B) trifft alle Strahlen von $\mathfrak{B}$. Die ihr entsprechende Ebene σ_B muss also alle Kegel von $M^1_{\mathfrak{B}}$ berühren und daher deren Enveloppe angehören. Charakteristiken auf ihr sind die Berührungskanten mit den Kegeln. (Das Wort Charakteristik wird in diesem und dem folgenden Abschnitt in zwei Bedeutungen gebraucht: einmal — nach Monge — als Bezeichnung für die Schnittkurven je zweier unendlich benachbarten Flächen eines Systems und, was das-

selbe ist, die Berührungskurven der einzelnen Flächen des Systems mit ihrer Enveloppe; ferner — nach Chasles — für die Zahlen der Flächen eines Systems, welche die Elementarbedingungen erfüllen.

Jeder Kegel hat 4 Charakteristiken, von denen nur eine in die erwähnte Ebene fällt, die je 3 anderen erzeugen den restierenden Teil der Enveloppe.

Um festzustellen, wie viele Geraden des restierenden Teils in eine Ebene τ von S fallen, betrachten wir einen solchen Strahl t durch S in τ. In ihm schneiden sich 2 unendlich benachbarte Kegel aus $M^1_{\mathfrak{B}}$. Deren entsprechende Strahlen in $\mathfrak{B}$ müssen ebenfalls einander unendlich nahe sein, ferner müssen sie die F^2_t berühren. Es handelt sich also um die Zahl der Flächen des Büschels R^4_τ, für welche die beiden Tangenten aus B sich vereinigen. Dies tritt dann und nur dann ein, wenn eine Fläche die Ebene β berührt oder durch B geht. B bestimmt *eine* F^2 aus R^4_τ, die, welche den Büscheln R^4_τ und R^4 (B) gemeinsam ist. Ihr entsprechender Strahl in S ist die Schnittlinie von τ mit σ_B, also die eine Charakteristik in τ, welche wir schon kennen. Da es in R^4_τ 3 F^2 gibt, welche β berühren, und für eine solche die vorangegangenen Betrachtungen umkehrbar sind, so ist der restierende Teil der Enveloppe ein Kegel 3. Ordnung: K^3, und zwar ist es derjenige, dessen Kanten den Flächen des Netzes entsprechen, welche β berühren.

In dem System $M^1_{\mathfrak{B}}$ gibt es 3 ausgeartete Kegel, weil $\mathfrak{B}$ 3 Strahlen enthält, welche auf Flächen des Netzes liegen, die 3 in β liegenden Kanten des Komplexkegels dieser Geraden aus B. Es sind dies die 3 Strahlen von B nach den weiteren Schnittpunkten der R^4 (B) mit β.

Es hat sich also ergeben:

Das einem Strahlenbüschel $\mathfrak{B} = (B, \beta)$ *im* N-*Raume entsprechende System von Kegeln in* S *hat die Charakteristiken*:

$$\mu=2,\ \nu=4.$$

Die Enveloppe der Kegel von $M^1_{\mathfrak{B}}$ *besteht aus der Ebene, welche der Kurve* R^4 (B) *entspricht, und dem Kegel* K^3_6, *welcher der Ebene zugeordnet ist.*

In $M^1_{\mathfrak{B}}$ *befinden sich 3 ausgeartete Kegel.*

Lassen wir jetzt g das allgemeinste einstufige Gebilde, eine Regelfläche n^{ten} grades $\mathfrak{R}^n$, durchlaufen, so ist für das entsprechende Kegelsystem $M^1_{\mathfrak{R}^n}$: μ die Zahl der Tangenten einer Fläche des Netzes, welche auf $\mathfrak{R}^n$ gelegen sind, ν die Zahl der Sekanten einer Grundkurve R^4, die der $\mathfrak{R}^n$ angehören.

Die Tangenten einer Fläche bilden einen Komplex, der für eine F^2 den Grad 2 hat, weil der Tangentialkegel aus einem Punkte die Ordnung 2, die Kurve der Tangenten in einer Ebene die Klasse 2 hat.

Nach dem ersten Satze von Halphen beträgt die Zahl der gemeinsamen Geraden eines Komplexes p^{ten} und einer Regelfläche q^{ten} Grades: p . q. In unserem Falle hat p . q den Wert 2 n. Es ist also:

$$\mu = 2n.$$

Da eine R^4 die $\mathfrak{R}^n$ in 4 n Punkten trifft, und durch jeden dieser Punkte *eine* Erzeugende der $\mathfrak{R}^n$ geht, so ist 4 n die Zahl der auf $\mathfrak{R}^n$ gelegenen Sekanten einer R^4, d. h. es ist:

$$\nu = 4n.$$

Für das allgemeinste System M^1, *dessen Kegel den Geraden einer Regelfläche* n - *Grades entsprechen, ist also:*

$$\mu = 2\ n,\ \nu = 4\ n.$$

Da die Geraden, welche auf Flächen des Netzes liegen, einen Komplex 3. Grades bilden, und dieser mit $\mathfrak{R}^n$ 3 n Geraden gemein hat, *so gibt es 3* n *ausgeartete Kegel in diesem System* $M^1_{\mathfrak{R}^n}$.

Verschiedene von solchen Kegelsystemen M^1 sind schon erwähnt worden, so das System der Kegel, deren entsprechende Geraden eine Fläche des Netzes erfüllen, dass nur aus ausgearteten Kegeln besteht, und das System der Kegel, deren entsprechende Geraden die Geraden Σ in den

Ebenen $\mathfrak{S}$ sind. Diese Σ bilden eine $\mathfrak{R}^8$. Die Kegel dieses Systems lösen sich ja ab von den zerfallenden Kegeln K^3_6, deren zugeordnete Ebenen die Ebenen $\mathfrak{S}$ sind. (No. 13. b. β.)

18. Einem Büschel g von Ebene ε entspricht ein einfach unendliches System N^1_g von Kegeln. Es ist μ gleich der Zahl der Tangentialebenen, die von g aus an eine feste F^2 von N gehen, also:

$$\mu = 2;$$

ν gleich der Zahl der Tangentialeben von g ans an eine gegebene Grundkurve des Netzes. Da eine solche R^4 den Rang 8 hat, so ist 8 auch die Klassenzahl für die von ihren Tangentialebenen gebildete Fläche, also

$$\nu = 8.$$

Die Enveloppe der Kegel von N^1 lässt sich leicht feststellen.

Zunächst wissen wir das alle Kegel K^3_6 den festen Kegel K^4_{12} berühren, dessen Kanten den Kegeln von N, dessen Tagentialebenen den Grundkurven mit Doppelpunkt entsprechen (No. 6). Also tun dies auch alle K^3_6 von N^1, d. h. der K^4_{12} gehört zu ihrer Enveloppe. Charakteristiken auf ihm sind die je 6 Berührungskanten mit einem K^3_6. Da aber jeder K^3_6 zu 9 Charakteristiken führt, so bleibt noch ein Teil der Enveloppe übrig.

Liegt in einer beliebigen Bündelebene σ ein Strahl s, durch den zwei unendlich benachbarte Kegel von N^1 gehen, so müssen die beiden entsprechenden Ebenen die F^2_s berühren. Da sie aber einander unendlich benachbart sind, so muss g Tangente der F^2_s sein. Es fragt sich also, wie viele Flächen im Büschel R^4_5, dem ja F^2_s angehören muss, die g berühren. Da diese Flächen auch umgekehrt zu den Charakteristiken des restierenden Teils unserer Enveloppe in σ führen, und 2 die Anzahl dieser Flächen ist, so ist der restierende Teil der Enveloppe ein Kegel 2. Ordnung in S. Jeder Kegel des Systems N^1 liefert 3 Charakteristiken auf ihm. Es ist der Kegel K^2_2, welcher der Axe g des Ebenenbüschels zugeorrdnet ist.

Es hat sich also ergeben:

Das einem Ebenenbüschel im N*-Raume entsprechende System von Kegeln in* S *hat die Charakteristiken:*

$$\mu = 2, \quad \nu = 8.$$

Die Enveloppe der Kegel dieses Systems besteht aus K^4_{12}, *dessen Kanten den Kegeln von* N, *dessen Tangentialebenen den Grundkurven mit Doppelpunkt entsprechen, und dem Kegel* K^2_2, *welcher der Axe des Ebenenbüschels zugeordnet ist.*

Die 3 Kanten, in denen dieser letztere Kegel von jedem der einhüllenden berührt wird, sind in No. 13 gefunden worden.

Wir werfen nun noch einen Blick auf das allgemeinste System N^1, dessen zugeordnetes Gebilde der Torsus n^{ter} Klasse ist. Die Charakteristiken dieses Systemes sind die Anzahlen der gemeinsamen Tangentialebenen des gegebenen Torsus mit einer festen Fläche F^2 oder mit der Tangentialebenenfläche F^8 einer festen Grundkurve R^4 des Netzes.

Es ergibt sich für N^1:

$$\mu = 2\ n, \quad \nu = 8\ n;$$

Geht der Torsus, dessen entsprechendes System wir mit N^1 bezeichnet haben, in einen Kegel K des Netzes über, so liegt der dem K zugeordnete Strahl auf allen Kegeln von N^1, und zwar als Doppelkante.

Spezielle Fälle sind im Vorangehenden schon betrachtet worden, so dieser, und ferner das System N^1, dessen Kegel den Ebenen $\mathfrak{S}$ von N entsprechen. Die $\mathfrak{S}$ umhüllen eine abwickelbare Fläche $\mathfrak{S}_{14}$ von der Klasse 14 (Sturm, Flächennetz 2. O. No. 35). Die Kegel von N^1 zerfallen hier je in eine Ebene und einen Kegel 2. Grades, den der Geraden Σ der zugehörigen Ebene $\mathfrak{S}$ entsprechenden.

An diesem Beispiel können wir eine Kontrolle über die Richtigkeit der Charakteristik μ ausüben.

Es ist in diesem Falle:

$$\mu = 2\ n = 2\ .\ 14 = 28.$$

Durch den beliebigen Strahl s, der die 28 Kegel aus N^1 bestimm, gegen 12 von den sich ablösenden Ebenen,

da diese einen Kegel 12. Klasse umhüllen (No. 13a); die volle Zahl 28 kommt zustande durch die 16 Kegel K^2_2, welche s ja aus dem System M^1 ausscheiden muss (No. 17a), das der von den Geraden Σ gebildeten Regelfläche 8. Grades entspricht.

Zweiter Teil.

Die durch die Schnittpunkte entsprechender Strahlen und Flächen oder, was dasselbe ist, entsprechender Ebenen und Grundkurven im Bündel und im Netz erzeugte Fläche und die auf ihr gelegenen Raumkurven, die entstehen, wenn die erzeugenden Elemente einen der im Vorangehenden behandelten Oerter durchlaufen.

I.

Die erzeugte Fläche.

19. Wir wollen nun die Gebilde in S und N verlassen und zur Betrachtung der Fläche F übergehen, welche durch die Schnittpunkte entsprechender Strahlen und Flächen in S und N erzeugt wird. In dieser F vermuten wir eine Fläche 3. Ordnung. Denn wir haben gesehen, dass die in einer Bündelebene σ durch die Schnittpunkte entsprechender Elemente erzeugte Kurve, die Schnittkurve der σ mit F, eine C^3 ist. (No. 5); ferner, dass der Tangentialkegel aus dem Punkte S, der ja auch auf F liegen muss, ein Kegel 4. Qrdnung ist (No. 5), und endlich, dass 27 Geraden auf F verlaufen, welche durch 27 von den 28 Doppeltangentialebenen dieses Kegels in F eingeschnitten werden. (No. 15b.) Alles dies sind Eigenschaften der Flächen 3. Ordnung.

Dass unsere Vermutung zutrifft, wollen wir uns nun klar machen, indem wir die Zahl der Schnittpunkte der F mit einer Geraden g untersuchen.

Auf g legen wir eine Korrespondenz folgendermassen fest:

Jeder Punkt X der ersten Punktreihe bestimmt einen Strahl s von S. Die entsprechende F^2 trifft g in zwei Punkten X'. Diese ordnen wir dem X zu.

Von einem Punkte X′ gelangen wir zum entsprechenden X, indem wir zunächst die der Ebene (S g) zugeordnete R^4 in N, und dann in ihrem Büschel die durch X′ gehende Fläche aufsuchen. Deren entsprechender Strahl liegt in (S g), trifft also g, etwa in einem Punkte X. Das ist der dem X′ entsprechende.

Es handelt sich also um eine Korrespondenz [1, 2]. Ihre 3 Koinzidenzen sind die Schnittpunkte mit F. *F ist also wirklich von der 3. Ordnung.*

Hiermit ist auch der Tangentialkegel an F aus S, der ja einer ihrer Punkte ist, bekannt, Ordnung, Klasse und singuläre Elemente. (Wegen der 27 + 1 Doppeltangentialebenen verweise ich auf: Geiser, Ueber die Doppeltangenten einer ebenen Kurve 4. Grades. Mathematische Annalen Bd. 1).

Dieser Kegel ist in Nr. 5 und 15 ohne Kenntnis der Ordnungszahl 3 der erzeugten Fläche betrachtet worden.

Die Korrelation zwischen dem Strahlenbündel S und dem Flächennetz N hat eine Korrelation zwischen dem Ebenenbündel S und dem zu N gehörigen Netz von Grundkurven zur Folge, über die wir schon gesprochen haben. (Nr. 1).

Wir können uns nun die F^3 *auch durch die Schnittpunkte entsprechender Elemente in dieser Korrelation zwischen den Ebenen von* S *und den entsprechenden Grundkurven von* N *entstanden denken.* Jeder ihrer Punkte, der auf die eine Art zustande kommt, kann auch auf die andere Art entstehen.

Liegt nämlich P auf einem Bündelstrahl und der zugeordneten F^2, so verläuft R^4 (P) auf dieser F^2, und deren entsprechende Ebene geht daher durch SP, mithin auch durch P.

Gehen umgekehrt durch P eine Ebene σ von S und ihre entsprechenden R^4 aus N, so muss die dem Strahl SP zugeordnete F^2 dem Büschel R^4_σ angehören, also auch durch P gehen.

Auch bei dieser Entstehung können wir uns die Ordnung 3 der F klar machen.

Wir betrachten die Schnittkurve mit einer Ebene ε. In ε wird eine eineindeutige Verwandtschaft hervorgerufen zwischen den Geraden des Feldes ε, die durch die Bündelebenen eingeschnitten werden, und den ∞^2 vierpunktigen Gruppen der Schnitte mit den zugeordneten R^4. Die Schnittkurve in ε wird gebildet von den Punkten, welche mit ihren entsprechenden Geraden inzidieren.

Lassen wir einen Punkt P in ε eine Gerade g durchlaufen, so beschreibt die der R^4 (P) zugeordnete Ebene in S einen Kegel 2. Klasse (Nr. 7). Dieser schneidet in ε eine Kurve C_2 ein. Die Tangenten dieser C_2 sind die den Punkten von g zugeordneten Geraden. g und C_2 befinden sich in eineindeutiger Beziehung ihrer Elemente. Da es nun bei zwei Kurven von der Ordnung n_1 bezw. Klasse n_2, deren Elemente eineindeutig auf einander bezogen sind: (n_1+n_2)mal vorkommt, dass entsprechende Elemente inzidieren, (Sturm, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften I Nr. 177), so haben wir in diesem Falle 3 Punkte auf g, welche ihre entsprechenden Geraden enthalten. Hiermit ist die Ordnungszahl 3 bestätigt.

Die erzeugte Fläche enthält den Scheitel S *des Bündels und die Grundpunkte* P_i *des Netzes, und sie wird in* S *von der Bündelebene* σ_0 *berührt, welche dem Flächenbüschel* $R^4(S)$ *entspricht*, so dass σ_0, die in 15a eingeführt ist, zusammenfällt mit der in 15b als $\bar{\sigma}$ bezeichneten Tangentialebene von F^3 in S, *in jedem Punkte* P_i *von der Tangentialebene der Fläche* F^2, *welche dem Strahl* SP_i *zugeordnet ist.* (Sturm, Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung, Nr. 110).

Auf jedem Bündelstrahl sind die drei Schnittpunkte mit F^3 der Scheitel S und die beiden gemeinsamen Punkte mit der F^2_s, die erzeugenden Punkte der F^3.

Lassen wir s einen Ort durchlaufen, so beschreiben die erzeugenden Punkte auf s eine Raumkurve R, welche auf der F^3 liegt.

20a) Wir wollen nun die Raumkurven R näher betrachten, welche durch Bewegung von s auf einem der in

I. behandelten Kegel K entstehen. Jede von ihnen ist der Schnitt von F^3 mit dem betreffenden Kegel K.

Ist i *die Ordnungszahl von* K, *so hat die entstehende* R *die Ordnung* 3i.

Wir wollen nun das Verhalten dieser Kurven R^{3i} hinsichtlich des Büudelscheitels S und der Grundpunkte P_i untersuchen.

Wenn S auf einer der R^{3i} liegt, so muss S erzeugender Punkt auf einer Kante s des zugehörigen Kegels K^i sein, d. h. Schnittpunkt von s mit der entsprechenden $F^2{}_s$. Die $F^2{}_s$ muss mithin durch S gehen, also dem Büschel R^4 (S) angehören, also s muss in σ_0 liegen. Daher kann s nur Schnittlinie von σ_0 mit dem K^i sein. Da σ_0 i Kanten mit K^i gemein hat, *so ist* S auf i Strahlen erzeugender Punkt, also i*fach auf* R^{3i}.

Die Grundpunkte P_i *hingegen liegen im allgemeinen nicht auf den Kurven* R^{3i}, da sie auch nicht auf den Kegeln K^i liegen. Denn es handelt sich ja um folgende Strahlenörter:

1) eine Bündelebene σ,
2) den Kegel K^2, dessen Kanten den F^2 entsprechen, welche eine feste Gerade berühren,
3) den Kegel K^3, dessen Kanten den F^2 zugeordnet sind, welche eine feste Ebene berühren,
4) den Kegel K^4, dessen Kanten den Kegeln von N entsprechen,
5) den Kegel K^4, dessen Kanten ihre zugeordneten F^2 berühren.

Die ersten drei Oerter sind in S in gewissen Mannigfaltigkeiten vorhanden; ein beliebiger unter ihnen geht also nicht durch einen festen Strahl SP_i, mithin auch nicht durch P_i.

Die letzten beiden Kegel enthalten deshalb nicht den Strahl SP_i, weil wegen der Willkürlichkeit der Zuordnung die dem Strahl SP_i entsprechende F^2 weder ein Kegel ist, noch den SP_i berührt.

Jede Kante des erzeugenden Kegels trifft R^{3i} in den beiden erzeugenden Punkten und in dem ifachen Punkte S, ist also (i + 2)fache Sekante der R^{3i}.

Jede von den 27 Geraden der Fläche F^3 hat mit R^{3i} die i Punkte gemein, in denen sie den zugehörigen K^i trifft.

Zwei gleichartige Kurven R^{3i} *haben* $3i^2$ *Punkte gemeinsam*, die Schnittpunkte der beiden zugehörigen Kegel K^i und der F^3; *zwei Kurven* R^{3i} *und* R^{3k} in analoger Weise 3ik *Punkte. Unter den gemeinsamen Punkten ist natürlich* S *enthalten, und zwar zählt er als* i^2, *bezw. als* ik *Schnittpunkte.* Die entstandenen Kurven sind also der Reihe nach Kurven:

$$C^3,\ R^6,\ R^9,\ R^{12},\ R^{12}.$$

Die C^3 in σ wird erzeugt durch den in σ gelegenen Strahlenbüschel von S und den zu diesem projektiven Kegelschnittbüschel, den der Flächenbüschel R^4_σ in σ einschneidet. Diese C^3 enthält daher S einfach, eine Bestätigung des allgemein festgestellten Resultates.

Besonders interessant ist die R^{12}, welche durch den zweiten Kegel K^4 in F^3 eingeschnitten wird. Sie ist die Kurve der Berührungspunkte der von S aus an die F^3 gelegten anderweitig berührenden Tangenten. Als solche muss sie doppelt zählen als Schnittkurve des K^4 mit der F^3 und daher in zwei gleichartige einander unendlich benachbarte R^6 zerfallen.

Dies können wir durch eine andere Ueberlegung bestätigen.

Die Kurve der Berührungspunkte der von einem Punkt 0 an eine Fläche F^n gelegten Tangenten ist die Schnittkurve der F^n mit der ersten Polare von 0 in Bezug auf F^n, einer F^{n-1}, also eine $R^{n(n-1)}$. In unserem Falle handelt es sich daher um eine R^6. (Sturm, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften III, Nr. 683).

Liegt 0, wie hier, auf der F^n, so berühren F^n und F^{n-1} einander in 0, die $R^{n(n-1)}$ hat also in 0 einen Doppel-

punkt. (Sturm, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften III Nr. 682).

Daher hat die R^6 in S einen Doppelpunkt, wodurch die Vierfachheit von S auf der doppelt zu zählenden R^6, der R^{12}, zustande kommt.

b). In analoger Weise führen die behandelten Ebenenörter in S zu Kurven R der F^3 durch die Schnittpunkte ihrer Ebenen mit den entsprechenden Grundkurven.

Eine solche R *ist die Schnittkurve der* F^3 *mit der Fläche, welche von den den Ebenen eines solchen Ortes entsprechenden Grundkurven gebildet wird. Hat diese Fläche die Ordnung* k, *so ist also* 3k *die Ordnung der zugehörigen* R.

Keine von diesen R^{3k} *enthält im allgemeinen den Scheitel* S. Denn es handelt sich um folgende einschneidenden Flächen:

1.) eine F^2 des Netzes,
2.) die Fläche der Grundkurven, welche eine gegebene Gerade g treffen,
3.) die Fläche der Grundkurven, welche eine gegebene Ebene ε berühren,
4.) die von den Grundkurven mit Doppelpunkt gebildete Fläche,
5.) die Fläche, die von den Grundkurven gebildet wird, welche ihre entsprechenden Ebenen berühren.

Da eine beliebige F^2 von N nicht durch S geht, und ferner die Kurve $R^4(S)$ weder eine beliebige Gerade g trifft, noch eine beliebige Ebene ε berührt, noch einen Doppelpunkt besitzt, noch, wegen der Willkürlichkeit in der Festlegung der Korrelation, ihre entsprechende Ebene berührt, so liegt S auf keiner dieser Flächen, mithin auf keiner der Kurven R^{3k}.

Die unter 2.), 3.), 4.) erwähnten Flächen haben die Ordnungszahlen 4, 12, 24 und enthalten jeden Grundpunkt P_i bezw. 2-, 6-, 12fach. (Flächennetz 2. O. Nr. 7, 9, 25). Es sind also die Ordnungszahlen der ersten vier R der Reihe nach: 6, 12, 36, 72, und die Grundpunkte P_i sind daher bezw. auf ihnen, da sie einfach auf F^3 liegen,: 1-, 2-, 6-, 12fach.

Die zuletzt erwähnte Fläche hat die Ordnungszahl 28, wie in Nr. 11 bewiesen worden ist. Wir müssen noch untersuchen, wie vielfach jeder P_i auf dieser F^{28} liegt.

Die Schnittpunkte einer Geraden g mit F^{28} sind die gemeinsamen Punkte von g mit denjenigen Grundkurven, welche sie treffen und ihre zugeordneten Ebenen berühren. Diese entsprechenden Ebenen sind also zugleich Tangentialebenen des der Geraden g zugeordneten Kegels K_2 in S und des K_{14}. Deren Zahl 28 führte zur Ordnungszahl 28 unserer Fläche.

Geht g durch P_i, so liegt g auf einer Fläche des Netzes: $F^2(g)$. Der zugeordnete K_2 wird dann dargestellt durch den doppelt zu zählenden Ebenenbüschel um s_g. Dieser hat 14 Ebenen mit K_{14} gemein, welche aber doppelt zählen. Die ihnen entsprechenden R^4 treffen g doppelt, einmal aber alle in P_i. Da sie ferner ihre zugeordneten Ebenen berühren, so gehören sie F^{28} an. g trifft also nur 14 erzeugende Kurven der F^{28}, jede in 2 Punkten, deren einer aber P_i ist. Mithin liegen ausser P_i 14 Punkte der F^{28} auf g, und so auf jeder durch P_i gehenden Geraden. P_i ist also 14facher Punkt auf F^{28}.

Die F^{28} führt also zu einer R^{84}, welche durch jeden Grundpunkt 14fach hindurchgeht.

Also hat sich ergeben, dass P_i *auf* R^{3k} $\frac{k}{2}$ *fach liegt.*

(Die Ordnungszahlen der erwähnten Flächen sind alle gerade.)

Die 27 Geraden der F^3 treffen die erwähnten Raumkurven je in 2, 4, 12, 24, 28 Punkten, ihren Schnittpunkten mit den Flächen, welche diese R in F^3 einschneiden.

Wie im anderen Falle ergibt sich auch hier, *dass* 2 *Kurven* R^{3k} $3k^2$ *Punkte gemeinsam haben, eine Kurve* R^{3k} *und eine Kurve* R^{3i} $3ki$ *Punkte. Zu den gemeinsamen Punkten gehören natürlich die Grundpunkte* P_i. *Sie zählen je als* $\frac{k^2}{4}$, *bezw.* $\frac{k}{2} \cdot \frac{i}{2}$ *Schnitte.*

Besonderes Interesse bietet die Kurve R^{84} dar; sie wird gebildet durch die Schnittpunkte der Ebenen, welche ihre

entsprechenden R^4 berühren, mit diesen R^4. Jede dieser Ebenen hat also mit der zugeordneten R^4 zwei einander unendlich nahe Punkte und zwei weitere gemein. R^{84} zerfällt also in die Kurve der Berührungspunkte und die Kurve der weiteren Schnittpunkte.

21a α.) Die erste von diesen — sie sei mit R_b bezeichnet — wollen wir nun näher betrachten.

Um ihre Ordnung zu ermitteln, fassen wir eine beliebige Ebene ε ins Auge. Jeder Schnittpunkt von ε mit R_b — die Zahl dieser Punkte ist ja die Ordnung von R_b — liegt als Punkt von R_b auf F^3, mithin auf der Schnittkurve C^3_ε von ε mit F^3.

Legen wir in jedem Punkte P *von* C^3_ε *die Tangente* t *an die durch* P *bestimmte Grundkurve* $R^4(P)$, *so erhalten wir eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von solchen Geraden* t, *eine Regelfläche* $\mathfrak{R}$.

Jede Tangente einer Grundkurve des Netzes liegt auf einer Fläche desselben. Dies gilt zunächst für eine Doppelsekante PQ einer R^4.

Bestimmen wir nämlich eine F^2 von N durch einen der beiden Punkte P oder Q, etwa P, und einen weiteren Punkt O von PQ, so enthält diese F^2 die $R^4(P)$, mithin auch Q, also die Gerade PQ, da sie 3 ihrer Punkte P, O, Q enthält. Eine andere F^2 durch PQ kann es nicht geben, da zwei verschiedene Flächen von N nicht eine Gerade gemeinsam haben können. (Von den Verbindungsgeraden zweier Grundpunkte sehen wir natürlich hier ab.)

Der Beweis ändert sich nicht, wenn P und Q einander unendlich nahe rücken, also PQ eine Tangente der betreffenden R^4 wird.

Jede Gerade einer F^2 wird von 2 Grundkurven R^4 berührt. (Nr. 12bα).

Daraus folgt, *dass jede Tangente einer Grundkurve von* N *zugleich von einer zweiten Grundkurve berührt wird.*

Wir können also sagen: *Die Regelfläche* $\mathfrak{R}$ *wird gebildet von Grundkurventangenten, welche einen der beiden auf ihnen gelegenen Berührungspunkte auf der* C^3_ε *haben.*

Es leuchtet unmittelbar ein, dass die Geraden dieser Regelfläche den Kurven $R^4(P)$, welche sie in Punkten P auf C^3_ε berühren, eineindeutig zugeordnet sind. Hieraus ergibt sich eine eineindeutige Beziehung zwischen den Geraden t von $\mathfrak{R}$ und den Ebenen von S, welche den zugeordneten Kurven $R^4(P)$ in der Bündel-Netz-Korrelation entsprechen. *Es sind einander zugeordnet eine Gerade* t *von* $\mathfrak{R}$ *und die Ebene von* S, *deren entsprechende* R^4 *im Netz von* t *in deren Treffpunkte* P *mit* C^3_ε *berührt wird.* P liegt als Punkt von C^3_ε auf F^3 und ist daher der $R^4(P)$ und der F^3 gemeinsam, mithin ist P, da er ja im allgemeinen kein Grundpunkt ist, erzeugender Punkt von F^3 auf $R^4(P)$, — jede Grundkurve trifft ja F^3 in 12 Punkten, den 4 erzeugenden und den 8 Grundpunkten —; also liegt P in der Ebene, welche der $R^4(P)$, oder, was dasselbe ist, welche der Tangente t in P an $R^4(P)$ entspricht.

Die Ebenen, die wir den Geraden unserer Regelfläche $\mathfrak{R}$ *zugeordnet haben, sind also Bündelebenen, für welche ein erzeugender Punkt von* F^3, *d. h. ein Schnittpunkt mit der entsprechenden* R^4, *auf* C^3_ε *oder, was dasselbe ist, in* ε *fällt. Da sie in einfach unendlicher Mannigfaltigkeit in* S *vorhanden sind, umhüllen sie einen Kegel* K *mit der Spitze* S.

Die eineindeutige Beziehung zwischen den Geraden t und den erwähnten Ebenen ist also eine Beziehung zwischen den Geraden einer Regelfläche $\mathfrak{R}$ und den Tangentialebenen eines gewissen Kegels K, und zwar treffen sich entsprechende Elemente in Punkten P von C^3_ε.

Für die Punkte von C^3_ε, welche auf R_b gelegen sind, wird $R^4(P)$ in P von der ihr entsprechenden Ebene berührt. Es liegt dann die Tangente t in P an $R^4(P)$ in der der $R^4(P)$ entsprechenden Bündelebene, d. h. in der ihr als Geraden von $\mathfrak{R}$ zugeordneten Tangentialebene des Kegels K.

Fällt umgekehrt eine Gerade t von $\mathfrak{R}$ in die ihr zugeordnete Tangentialebene von K, so berührt diese Ebene die Kurve $R^4(P)$, welche t in P zur Tangente hat, ebenfalls in P, und sie entspricht als Bündelebene der $R^4(P)$. Eine

solche Ebene, welche mit ihrer zugeordneten Geraden t inzident ist, berührt also ihre entsprechende Grundkurve in einem Punkte von C^3_ε, d. h. von ε.

Wir haben hiermit erkannt, dass die Zahl der Punkte von R_b, *welche in* ε *fallen, identisch ist mit der Zahl der Geraden* t *von* $\mathfrak{R}$, *die mit ihren entsprechenden Tangentialebenen von* K *inzident sind.*

β) Um diese Zahl festzustellen, betrachten wir K und $\mathfrak{R}$ genauer. Die Klasse von K, d. h. die Zahl der K einhüllenden Ebenen durch einen Strahl s von S, ist ja die Zahl der Ebenen des Büschels s, für welche ein Schnittpunkt mit der entsprechenden R^4 in ε fällt, also, da ε eine beliebige Ebene ist, die Ordnung der Raumkurve, die erzeugt wird durch die Schnittpunkte der Ebenen des Büschels s mit ihren entsprechenden R^4. Diese Raumkurve hat die Ordnungszahl 6 (Nr. 20b). *Mithin ist der Kegel* K *6. Klasse.*

Wir können uns von der Richtigkeit dieser Zahl 6 in ihren beiden Bedeutungen noch auf einem anderen Wege überzeugen, ohne, wie in Nr. 20b, die Ordnung 3 der F^3 zu benutzen.

Es handelt sich um die Zahl der Ebenen eines Büschels s von S, für die ein Schnittpunkt mit der entsprechenden R^4 in ε liegt. Die entsprechenden R^4 der Ebenen von s liegen auf der F^2_s, ihre Treffpunkte mit ε also auf der Schnittkurve von ε mit F^2_s, einem Kegelschnitt C^2_s; und zwar bilden die Gruppen von je 4 Schnittpunkten auf C^2_s offenbar eine Involution 4. Grades. Die Gruppen von je 2 Schnittpunkten von C^2_s mit den Ebenen durch s bilden auf C^2_s eine Involution 2. Grades. Zwischen den Gruppen dieser beiden Involutionen besteht Projektivität mit solchen Gruppen als entsprechenden, welche von entsprechenden Elementen von s und F^2_s eingeschnitten werden. Es entsteht also auf C^2_s eine Korrespondenz [2, 4], in der jedem Element der einen Involution, das ja einer Gruppe dieser Involution angehört, die sämtlichen der entsprechenden Gruppe der anderen Involution zugeordnet sind. Da der Kegelschnitt zu den unikursalen Gebilden gehört, so gibt es 6 Koinzi-

denzen. Dies sind, wie unmittelbar klar ist, die möglichen Schnittpunkte von Ebenen durch s mit ihren entsprechenden R^4 in ε. (Es sind die 6 Schnitte von $C^2{}_s$ mit $C^3{}_\varepsilon$).

Hiermit ist die Bestätigung erreicht.

Wir wenden uns nun der $\mathfrak{R}$ zu.

γ) Ihr Grad ist die Zahl der Grundkurventangenten mit je einem Berührungspunkt auf $C^3{}_\varepsilon$, welche eine Gerade g treffen. *Sämtliche Grundkurventangenten bilden einen Komplex, und zwar*, da jede Grundkurventangente auf *einer* Fläche von N liegt, und umgekehrt jede Gerade einer F^2 zwei Grundkurven berührt, *ist dies der Komplex der Geraden, welche auf Flächen des Netzes liegen, also der bekannte Komplex 3. Grades.*

Diejenigen Grundkurventangenten, welche eine gegebene Gerade g *des Raumes treffen, bilden eine Kongruenz, die Schnittkongruenz des eben erwähnten Komplexes 3. Grades mit dem Gebüsche der Geraden, welche* g *treffen. Ordnung und Klasse dieser Kongruenz haben also beide den Wert 3.*

Der Gang der Untersuchung ist nun folgender:

Unter den Geraden dieser Kongruenz bilden die, welche einen ihrer beiden Berührungspunkte in ε haben, eine Regelfläche. Ihrer Schnittkurve mit ε gehören die in ε gelegenen Geraden dieser Regelfläche an — es gibt 3 solche Geraden, wie später gezeigt werden soll —; der restierende Teil wird gebildet durch die Berührungspunkte auf Grundkurventangenten, welche g treffen und nicht in ε liegen. Die Schnittpunkte des restierenden Teils mit $C^3{}_\varepsilon$ sind also die Berührungspunkte solcher Grundkurventangenten auf $C^3{}_\varepsilon$. Die Berührungspunkte der in ε gelegenen Tangenten liegen nicht auf $C^3{}_\varepsilon$, wie ebenfalls später einleuchten wird. Die Zahl der Schnittpunkte des restierenden Teils mit $C^3{}_\varepsilon$ ist also die Zahl der Geraden t von $\mathfrak{R}$, welche die beliebige Gerade g treffen, mithin der Grad der von uns betrachteten Regelfläche $\mathfrak{R}$.

Wir führen nun die Untersuchung im einzelnen durch.

δ) Da die Grundkurventangenten, welche eine Gerade g treffen, eine Kongruenz bilden, so sind die je 2 Berührungspunkte auf ihnen in zweifach unendlicher Mannigfaltigkeit vorhanden, bilden also eine Fläche F.

Um deren Ordnung zu bestimmen, machen wir uns eine andere Bedeutung von ihr klar.

Nehmen wir einen Punkt P auf ihr an, so ist er Berührungspunkt einer Grundkurventangente, welche g trifft, mit einer Grundkurve. Da durch P nur *eine* Grundkurve $R^4(P)$ hindurchgeht, so kann P nur Berührungspunkt der $R^4(P)$ mit ihrer Tangente p in P sein. Ferner muss p die g treffen. Es lässt sich also eine Ebene π durch g und p legen, welche natürlich ebenfalls $R^4(P)$ in P berührt. Der Punkt P gehört also der Kurve der Berührungspunkte von Grundkurven des Netzes mit π an, d. h. der Jacobischen Kurve des in π eingeschnittenen Kegelschnittnetzes.

Jeder Punkt P von F gehört also der in seiner Verbindungsebene mit g gelegenen Jacobischen Kurve an.

Ist umgekehrt Q ein Punkt der Jacobischen Kurve einer durch g gehenden Ebene ω, so wird ω in Q von einer R^4 berührt, natürlich von $R^4(Q)$, und die Tangente o von $R^4(Q)$ in Q gehört der ω an, trifft mithin g.

Es ist also jeder solche Punkt Q Berührungspunkt auf einer die g treffenden Grundkurventangente, d. h. er liegt auf F.

Es hat sich also gezeigt:

Die Fläche F *der Berührungspunkte auf Grundkurventangenten, welche eine Gerade* g *treffen, ist identisch mit der von den Jacobischen Kurven aller Ebenen des Büschels* g *erzeugten Fläche.* F ist daher nach 16aγ) eine F^4.

In 16aγ) ist ferner gezeigt worden, dass F^4 die g und die Kegelspitzenkurve C_K von N enthält. Dies folgt auch aus ihrer jetzt in den Vordergrund tretenden Bedeutung. Ein beliebiger Punkt U von g bestimmt eine R^4, die $R^4(U)$, die in U *eine* Tangente hat, und diese Tangente trifft g in U. U und so jeder Punkt von g ist somit Berührungspunkt auf einer g treffenden Tangente; g gehört also der F^4, und zwar einfach, an.

Ein Punkt V von C_K bestimmt ebenfalls eine R^4, die $R^4(V)$, für welche V Doppelpunkt ist. Als Tangenten in V an $R^4(V)$ haben wir die Geraden durch V in der Ebene $\mathfrak{S}_V$ anzusehen, welche zum Punkt V gehört (Nr. 13 b β). Eine von ihnen trifft g, die, welche nach dem Schnittpunkt von g mit $\mathfrak{S}_V$ läuft; also C_K ist ebenfalls einfach auf F^4 gelegen.

ε). Im Anschluss an die Ableitung der Ordnung dieser F^4 wollen wir noch eine Frage behandeln, welche nicht in unmittelbarem Zuhang mit dem hier erörterten Problem steht.

Wenn wir in einem Punkt P an die durch ihn bestimmte Grundkurve $R^4(P)$ die Tangente p legen und P auf einer Geraden l laufen lassen, so erfüllt p eine Regelfläche. Deren Grad ist die Zahl der Geraden p, welche eine Gerade g treffen.

Schneidet eine solche Tangente p′ die Gerade g, so gehört ihr Berührungspunkt der Fläche F^4 an, welche in dem eben erörterten Zusammenhang mit g steht. Wir wollen sie kurz als zugehörige Fläche der g: F^4_g bezeichnen. P′ ist also dann Schnittpunkt von l mit F^4_g.

Liegt umgekehrt $\bar{P}$ auf l und zugleich auf F^4_g, so muss wegen der zweiten Eigenschaft $\bar{p}$ die g treffen, wegen der ersten gehört $\bar{p}$ der behandelten Regelfläche an.

Es ist also der Grad dieser Regelfläche oder die Zahl ihrer Geraden, welche g treffen, zugleich die Zahl der Schnittpunkte von F^4_g mit l, d. h.:

Die Regelfläche, welche gebildet wird von den Grundkurventangenten, von denen der eine Berührungspunkt auf einer Geraden l *liegt, hat den Grad 4.*

Dies ergibt sich auch aus folgender Betrachtung:

Der andere Berührungspunkt ist konjugiert zu dem ersten in Bezug auf das Netz N. Da nun die eineindeutige Verwandtschaft zwischen konjugierten Punkten vom dritten Grade ist, (Sturm, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften IV Nr. 999) so beschreibt der zweite Berührungspunkt, während der erste auf einer Geraden l läuft, eine kubische Raumkurve. l und diese R^3 stehen in pro-

jektiver Beziehung ihrer Punkte. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte, das sind die Geraden unserer Regelfläche, bilden also eine Regelfläche 4. Grades.

ζ). Wir kehren nun zu unserem Problem zurück und fragen nach dem Ort der Berührungspunkte auf Grundkurventangenten, welche zugleich zwei Geraden m und n treffen.

Die gesuchten Punkte müssen, wie unmittelbar einleuchtet, auf $F^4{}_m$ und $F^4{}_n$ liegen, also auf deren Schnittkurve, einer R^{16}.

Aber nicht die volle R^{16} ist der gewünschte Ort, sondern nur ein Teil von ihr.

Zu der R^{16} gehört nämlich die Kegelspitzenkurve C_K von N, da C_K auf $F^4{}_m$ und $F^4{}_n$ liegt. Nach deren Abzug bleibt eine R^{10} übrig.

Für einen beliebigen Punkt P auf dieser gilt folgende Betrachtung:

P bestimmt *eine* Grundkurve, die $R^4(P)$, diese hat *eine* Tangente, p, in P. p muss, weil P auf $F^4{}_m$ liegt, die m, weil P auf $F^4{}_n$ liegt, die n treffen. Mithin gehört P zu den gesuchten Punkten.

Für die Punkte Q der C_K gilt das nicht, denn die $R^4(Q)$ hat in Q einen Doppelpunkt. Die zu Q gehörige Ebene $\mathfrak{S}_Q$ ist dann der Ort der Geraden, welche $R^4(Q)$ in Q berühren. Eine von diesen trifft m, die, welche nach dem Schnittpunkt von m mit $\mathfrak{S}_Q$ geht, eine n, die Verbindungslinie von Q mit dem Schnittpunkt (n,S_Q). Aber die beiden brauchen nicht identisch zu sein.

Es hat sich also ergeben:

Der Ort der Berührungspunkte auf Grundkurventangenten, welche zugleich zwei Geraden m *und* n *treffen, ist eine* R^{10}: $R^{10}{}_{m,n}$.

Diese enthält die Grundpunkte P_i des Netzes einfach; denn durch P_i geht *ein* Strahl, welcher zugleich m und n trifft, und dieser wird, wie jede durch einen Grundpunkt gelegte Gerade, in P_i von *einer* R^4 berührt.

Da P_i auf $R^{10}{}_{m,n}$ einfach liegt, der C_K aber nicht angehört, so ist er einfach auf der Gesamtschnittkurve der $F^4{}_m$

und F^4_n; mithin können wir schliessen, dass er auf F^4_m und F^4_n, also auf jeder derartigen F^4 einfach liegt.

$R^{10}_{m,n}$ verläuft natürlich auf der Fläche der Grundkurventangenten, welche m und n treffen. Deren Grad lässt sich leicht bestimmen.

η). Von jedem Punkte der m geht ein Kegel 3. Ordnung von Grundkurventangenten aus. Da dieser n in 3 Punkten trifft, so entsendet jeder Punkt von m 3 Grundkurventangenten, welche n treffen. Die 3 Treffpunkte können wir dem Punkte von m, von dem wir ausgegangen sind, zuordnen. Dadurch ist eine Korrespondenz zwischen den Punkten der Reihen m und n festgelegt, in welcher einem Punkte von n die Treffpunkte der von ihm ausgehenden Grundkurventangenten, welche m schneiden, mit m entsprechen. Deren Zahl ist ebenfalls 3, wie ganz analog folgt. Es handelt sich also um eine Korrespondenz [3,3].

Die Grundkurventangenten, welche m und n zugleich treffen, sind die Verbindungslinien entsprechender Punkte der beiden Reihen. Nun erzeugen die Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier geraden Reihen, deren Elemente in einer Korrespondenz [r,s] stehen, eine Regelfläche vom Grade r + s. (Sturm, die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften I 164). *Mithin ist die Regelfläche der Grundkurventangenten, welche* m *und* n *zugleich treffen, vom 6. Grade.*

ϑ). Die im Vorangehenden behandelte auf dieser $\mathfrak{R}^6$ verlaufende R^{10} belehrt uns über den Grad der Regelfläche, deren erzeugende Grundkurventangenten eine Gerade g treffen und einen ihrer beiden Berührungspunkte in ε haben. Die gesuchte Gradzahl ist die Zahl der Grundkurventangenten von den beiden erwähnten Eigenschaften, welche eine Gerade l treffen. Diese Tangenten treffen dann zwei Geraden, g und l, ihre Berührungspunkte bilden daher, wie wir wissen, eine R^{10}: R^{10}_{gl}.

Da R^{10}_{gl} 10 Punkte mit ε gemein hat, so kommt es 10 mal vor, dass eine g und l treffende Grundkurventangente

einen ihrer beiden Berührungspunkte in ε hat, d. h., dass eine Grundkurventangente, welche g trifft und einen ihrer beiden Berührungspunkte in ε hat, auch l schneidet.

Es hat also die Regelfläche, deren erzeugende Grundkurventangenten eine Gerade g *treffen und einen ihrer beiden Berührungspunkte in* ε *haben, den Grad 10.*

ι). Die $\mathfrak{R}^{10}$ schneidet ε in einer C^{10}, deren Punkte von zweierlei Art sind. Einmal sind es die Punkte der in ε gelegenen Grundkurventangenten, welche g treffen, dann die Berührungspunkte der Grundkurventangenten, welche g treffen und nicht in ε liegen.

Die in ε gelegenen Grundkurventangenten bilden eine Kurve 3. Klasse, die Komplexkurve des Komplexes 3. Grades in ε, zugleich die Cayleysche Kurve des in ε durch N eingeschnittenen Kegelschnittnetzes. (Flächennetz 2. O. Nr. 10).

g wird von 3 Einhüllenden der Cayleyschen Kurve von ε getroffen, den 3, welche von ihrem Schnittpunkt mit ε ausgehen. Diese 3 Geraden gehören der $\mathfrak{R}^{10}$ an, weil ihre Berührungspunkte in ε liegen, und da dies für beide Berührungspunkte gilt, so zählen sie doppelt als Geraden der $\mathfrak{R}^{10}$, also auch doppelt als Bestandteile der C^{10}.

Die restierende C^4 wird gebildet von Punkten der zweiten Art.

Die 12 Schnittpnnkte von C^4 mit C^3_ε sind auf C^3_ε gelegene Berührungspunkte von Grundkurventangenten, welche g treffen.

Die 3 Tangenten der Cayleyschen Kurve in ε, welche der C^{10} angehören, haben ihre Berührungspunkte nicht auf C^3_ε; denn die Berührungspunkte der Tangenten der Cayleyschen Kurve bilden ja die Jacobische Kurve des in ε gelegenen Kegelschnittnetzes; nur 9 solche Berührungspunkte liegen also auf C^3_ε, deren 9 Schnittpunkte mit der Jacobischen Kurve. Diese 9 Punkte liegen im allgemeinen nicht auf den 3 Tangenten der Cayleyschen Kurve, welche g treffen.

Hieraus folgt, *dass 12 die Anzahl der Grundkurventangenten ist, die einen Berührungspunkt auf* C^3_ε *haben und eine*

Gerade g *treffen, also zugleich der Grad der Regelfläche, die wir mit* $\mathfrak{R}$ *bezeichnet haben, deren Geraden die Grundkurventangenten* t *sind, die einen ihrer beiden Berührungspunkte auf* C^3_ε *haben.*

Wir können die Gradzahl 12 dieser Regelfläche noch auf einem anderen Wege ermitteln.

x). Die Regelfläche der Grundkurventangenten, welche eine Gerade g treffen und einen Berührungspunkt in ε haben, ist, wie wir eben erkannt haben, vom 10. Grade. g ist eine Leitgerade dieser $\mathfrak{R}^{10}$.

Um ihre Vielfachheit auf $\mathfrak{R}^{10}$ zu untersuchen, muss festgestellt werden, wie viele solche Grundkurventangenten von jedem Punkte der g herkommen.

Ein beliebiger Punkt P des Raumes entsendet einen Kegel 3. Ordnung von Grundkurventangenten. Die je 2 Berührungspunkte auf diesen bilden eine Raumkurve. Deren Ordnung wollen wir zunächst durch Schnitt mit einer Ebene ζ durch P bestimmen. ζ schneidet den erwähnten Kegel 3. Ordnung in 3 Kanten; deren jede enthält 2 Berührungspunkte. Dass sind 6 Punkte der zu untersuchenden R in ζ. P selbst liegt einfach auf der R, da P Berührungspunkt einer Grundkurventangente mit einer R^4 ist; dies ist die $R^4(P)$ mit ihrer Tangente in P.

ξ trifft also R in 7 Punkten. Es handelt sich mithin um eine R^7, wie wir allerdings nur mit Hilfe des Prinzips der speziellen Lage gefunden haben.

Die 7 Punkte, welche R^7 mit ε gemein hat, führen zu 7 Grundkurventangenten der verlangten Art durch P. Da umgekehrt jede solche Tangente zu einem gemeinsamen Punkt von R^7 mit ε führen muss, so ist 7 wirklich deren Anzahl.

Von jedem Punkt P des Raumes, also auch von jedem Punkt der g aus gehen 7 Grundkurventangenten, die einen Berührungspunkt in ε haben, d. h. g ist 7-fache Leitgerade auf $\mathfrak{R}^{10}$.

Wir können uns dies auch ohne das Prinzip der speziellen Lage klar machen.

Eine Ebene η durch g schneidet $\mathfrak{R}^{10}$ in einer C^{10}, an der g teilnimmt. Die Ordnungszahl des restierenden Teils, von 10 abgezogen, ergibt die Vielfachheit der g als Leitgerade der $\mathfrak{R}^{10}$.

Jeder nicht auf g gelegene Punkt Q der Schnittkurve von η mit $\mathfrak{R}^{10}$ führt zu einer Grundkurventangente, welche ausser Q noch ihren Treffpunkt mit g mit der η gemein hat, also ganz in η liegt. Die restierende Schnittkurve muss also aus Grundkurventangenten mit je einem Berührungspunkt in ε bestehen, welche in η liegen.

Da umgekehrt jede in η verlaufende Grundkurventangente die g trifft, so handelt es sich um die Zahl der Grundkurventangenten in η mit je einem Berührungspunkt in ε, d. h. also auf (η,ε).

Die Berührungspunkte der in η gelegenen Grundkurventangenten bilden die Jacobische Kurve des Kegelschnittnetzes in η.

Diese trifft jede Gerade von η, also auch die (η,ε) in 3 Punkten; mithin gibt es 3 Grundkurventangenten mit je einem Berührungspunkt auf (η,ε) in η.

Die Schnittkurve der η mit $\mathfrak{R}^{10}$ besteht also aus g und 3 Grundkurventangenten. Hieraus folgt, *dass* g *7-fache Leitgerade auf* $\mathfrak{R}^{10}$ *ist.*

Von jedem Punkte von g gehen also 7 Erzeugende der R^{10} aus; mithin, da g in keiner Beziehung zu ε steht, gehen von jedem Punkte des Raumes 7 Grundkurventangenten mit je einem Berührungspunkt in ε. Die Kongruenz dieser Geraden hat also die Ordnung 7.

Da von einem beliebigen Punkt P des Raumes 7 Grundkurventangenten ausgehen, die einen ihrer beiden Berührungspunkte in ε, d. h. in einer beliebigen Ebene des Raumes haben, *so muss*, wie unmittelbar klar ist, *die Raumkurve der Berührungspunkte auf Grundkurventangenten, welche von einem Punkte* P *ausgehen, die Ordnung 7 haben.*

Da der gesamte Bündel um P_i aus Grundkurventangenten mit dem Berührungspunkt P_i besteht, und *eine* Gerade des

Bündels nach P geht, so liegen die Grundkurve P_i einfach auf R^7.

Die Klasse dieser Kongruenz hat den Wert 3, denn die Zahl der Grundkurventangenten in einer Ebene ξ mit je einem Berührungspunkt in ε, also auf (ξ, ε), hat den Wert 3, wie eben abgeleitet worden ist.

Es hat sich also ergeben:

Die Grundkurventangenten, welche je einen Berührungspunkt in einer Ebene ε haben, bilden eine Kongruenz 7. Ordnung, 3. Klasse.

λ). Diese Kongruenz (7, 3) hat mit dem Komplex der Geraden, welche die C^3_ε treffen, da dieser vom 3. Grade ist, nach dem zweiten Halphenschen Satze (vgl. auch Sturm, Liniengeometrie I Nr. 36) eine Regelfläche 30. Grades gemeinsam.

Die Geraden dieser Regelfläche sind Grundkurventangenten, welche einen Berührungspunkt in ε haben und die C^3_ε treffen.

Solcher Tangenten gibt es zwei Arten:

1) die, für welche der Treffpunkt mit C^3_ε von dem in ε gelegenen Berührungspunkt getrennt ist,
2) die, für welche diese beiden Punkte zusammenfallen.

Die Geraden der ersten Art fallen in ε, da sie mit ε je 2 Punkte gemein haben, sind also Tangenten der Cayleyschen Kurve von ε.

Umgekehrt sind alle Einhüllenden dieser Kurve dem Komplex 3. Grades und der Kongruenz (7, 3) gemeinsam. Und zwar sind es, bis auf die endliche Anzahl 9, Geraden der ersten Art. Denn die Berührungspunkte der in ε fallenden Grundkurventangenten bilden ja eine Kurve 3. Ordnung, die Jacobische Kurve in ε, und nur deren 9 gemeinsame Punkte mit C^3_ε sind Berührungspunkte von Tangenten, welche in ε fallen und der zweiten Art angehören.

Die Cayleysche Kurve von ε nimmt also an der Regelfläche der gemeinsamen Geraden des Komplexes und der Kongruenz teil, und zwar umfasst sie die gemeinsamen Ge-

raden der ersten Art. Da jede ihrer Einhüllenden die C^3_ε 3 mal trifft, so zählt sie 3-fach als Teil des Komplexes, ferner, da jede ihrer Tangenten 2 Berührungspunkte enthält, 2-fach als Teil der Kongruenz, also zählt sie als Teil des Durchschnittes 2.3fach, d. h. 6-fach. Weil nun die Cayleysche Kurve von der 3. Klasse ist, so zählt sie für einen Teil des Durchschnittes vom Grade 18.

Der restierende Teil der Regelfläche, welche dem Komplex und der Kongruenz gemeinsam ist, besteht aus Grundkurventangenten der zweiten Art, d. h. solchen, welche einen Berührungspunkt auf der C^3_ε haben. Diese bilden also eine Regelfläche vom Grade $30-18 = 12$.

Hiermit ist das früher gefundene Resultat bestätigt. Wir haben erkannt:

Die Grundkurventangenten, welche einen ihrer beiden Berührungspunkte auf C^3_ε haben, bilden eine Regelfläche 12. Grades.

Ihre Schnittkurve mit ε besteht aus C^3_ε und den 9 Erzeugenden, welche in ε fallen.

μ) Nun hatten wir in Nr. 21, 1 abgeleitet, dass die Zahl der Punkte, die R_b mit ε gemein hat, gleich der Anzahl der Geraden t von $\mathfrak{R}^{12}$ ist, welche mit ihren entsprechenden Ebenen von K_6 inzident sind. Diese Anzahl können wir jetzt einfach finden.

Eine Regelfläche vom Grad m und ein Kegel von der Klasse n in eineindeutiger Beziehung ihrer Elemente erzeugen durch die Schnittpunkte dieser entsprechenden Elemente eine Raumkurve R^{m+n}. (Sturm, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften I No. 177). In unserem Falle entsteht also eine R^{18}.

Es trifft jede Gerade t der $\mathfrak{R}^{12}$, die ja ihre zugehörige Grundkurve R^4 in einem Punkte P der C^3_ε berührt, ihre entsprechende Tangentialebene von K_6 in P. Mithin ist der Ort der Punkte P, das ist die C^3_ε, das eigentliche Erzeugnis von $\mathfrak{R}^{12}$ und K_6, und zwar ist C^3_ε hierbei einfach zu rechnen. Der übrige Teil der R^{18} kann also nur durch Geraden t

zustande kommen, welche in ihre entsprechenden Tangentialebenen von K_6 hineinfallen. Deren Zahl ist also 15.

Hiermit haben wir die Ordnung 15 von R_b erkannt. Also:

Die Punkte, in denen Ebenen von S *ihre entsprechenden Grundkurven berühren, bilden eine Raumkurve 15. Ordnung.*

ν). Wir wollen nun das Verhalten von R_b zu den Grundpunkten P_i untersuchen.

Wenn P_i auf R_b liegt, so muss in P_i eine Grundkurve R^4 von N von ihrer entsprechenden Bündelebene berührt werden. Eine solche entsprechende Ebene geht durch P_i, gehört also dem Büschel SP_i an. Die den Ebenen dieses Büschels zugeordneten R^4 gehören einer bestimmten Fläche des Netzes an, derjenigen, welche dem Strahl SP_i entspricht. Wir wollen sie mit F^2_i bezeichnen.

Wird nun eine R^4, welche auf F^2_i verläuft, — nur diese kommen ja in Betracht für unseren Zweck — von ihrer entsprechenden Ebene in P_i berührt, so enthält diese Ebene auch die Tangente der R^4, die sie in P_i berührt. Und umgekehrt: Liegt die Tangente in P_i an eine R^4 von F^2_i in der dieser R^4 entsprechenden Ebene, so wird diese R^4 von der zugeordneten Ebene in P_i berührt.

Wir haben also unter den Tangenten der auf F^2_i gelegenen Grundkurven mit dem Berührungspunkt P_i die herauszusuchen, welche in die entsprechenden Ebenen der berührten Grundkurven fallen.

Die erwähnten Tangenten bilden einen Strahlenbüschel, den Büschel um P_i in der Tangentialebene von F^2_i in P_i. In ihm besteht eine Projektivität, in der zwei Tangenten zugeordnet sind, von denen die zweite in der Ebene liegt, die der von der ersten berührten R^4 entspricht.

Die beiden vorhandenen Koinzidenzebenen sind die Geraden u, für welche die berührten Grundkurven zugleich von ihren zugeordneten Ebenen berührt werden.

Mithin werden 2 R^4 in P_i von ihren entsprechenden Ebenen berührt. *Jeder Grundpunkt* P_i *von* N *ist also zweifach auf* R_b.

Im Anschluss hieran können wir noch die Richtigkeit der Ordnungszahl 15 von R_b bestätigen, indem wir sie mit einer F^2 von N schneiden. Wir wollen diese F^2 mit $\overline{F}^2$ bezeichnen.

R_b trifft $\overline{F}^2$ zunächst in den 8 Grundpunkten P_i, die ja auf beiden Gebilden liegen. Und zwar zählt jeder P_i, da er $\overline{F}^2$ einfach, R_b zweifach angehört, für 2 Schnittpunkte, so dass also durch alle Grundpunkte 16 Schnittpunkte zustande kommen.

Weitere Schnittpunkte von R_b mit $\overline{F}^2$ sind Berührungspunkte von Grundkurven R^4, welche ganz auf $\overline{F}^2$ verlaufen, mit ihren entsprechenden Ebenen. Diese Ebenen müssen durch den der $\overline{F}^2$ zugeordneten Bündelstrahl $\overline{s}$ gehen.

Umgekehrt liegen die gemeinsamen Punkte aller Ebenen des Büschels $\overline{s}$ mit ihren entsprechenden R^4 auf der $\overline{F}^2$, so dass wir nur die Zahl der Ebenen eines Büschels zu ermitteln brauchen, welche ihre entsprechenden R^4 berühren, um die Zahl der weiteren Schnittpunkte von R_b mit $\overline{F}^2$ zu haben. Diese Zahl hat den Wert 14, wie wir in Nr. 5 abgeleitet haben.

Mithin schneidet R_b die $\overline{F}^2$ im ganzen in 30 Punkten, womit die Ordnungszahl 15 von R_b bestätigt ist.

o). Es ist von Interesse, nach der Zahl der Begegnungspunkte von R_b mit der Kegelspitzenkurve C_K von N zu fragen.

Um sie zu ermitteln, betrachten wir neben C_K den Kegel K_{12}, dessen einhüllende Ebenen den Grundkurven mit je einem Doppelpunkt entsprechen. (Nr. 9). Die Elemente dieser beiden Gebilde sind einander eineindeutig zugeordnet. Jeder Punkt L von C_K ist nämlich als Kegelspitze zugleich Doppelpunkt einer R^4 (Flächennetz 2. O. Nr. 23); deren entsprechende Ebene λ, eine Tangentialebene von K_{12}, können wir dem L zuordnen. Umgekehrt entspricht dann einer Tangentialebene von K_{12}, deren zugeordnete R^4 einen Doppelpunkt hat, dieser Doppelpunkt, der als Kegelspitze auf C_K liegt.

Diese eineindeutige Beziehung ruft eine eineindeutige Beziehung zwischen den Tangentialebenen des K_{12} und des K^6 hervor, der C_K aus S projiziert, in welcher an Stelle eines Punktes von C_K die ihn projizierende Kante von K^6 tritt. Bei zwei konzentrischen Kegeln $n'_1{}^{ter}$ Klasse bezw. $n_2{}^{ter}$ Ordnung, die in eineindeutiger Beziehung ihrer Elemente stehen, kommt es nun $(n'_1 + n_2)$ mal vor, dass entsprechende Elemente inzidieren. (Sturm, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften I Nr. 177).

Hier gibt es also 18 Paare entsprechender inzidenter Elemente.

So oft nun eine Kante von K^6 mit ihrer zugeordneten Tangentialebene von K_{12} inzidiert, so oft fällt auch ein Punkt von C_K zusammen mit der entsprechenden Tangentialebene von K_{12}, und umgekehrt.

Hieraus folgt:

Es gibt 18 Punkte von C_K, d. h. Doppelpunkte L von R^4, welche mit den diesen R^4 entsprechenden Ebenen λ inzident sind.

Liegt ein solches Paar L, λ vor, so „berührt“ λ die entsprechende R^4 in L, da sie mit ihr 2 vereinigte Punkte in L gemeinsam hat. L liegt daher auf R_b und ist also gemeinsamer Punkt der R_b und C_K.

Da umgekehrt jeder gemeinsame Punkt von R_b und C_K zu einem Paare L,λ führt, so haben wir erhalten:

Die Kurven R_b *und* C_K *haben 18 gemeinsame Punkte. Es sind dies die 18 Doppelpunkte* L *von Grundkurven, welche in die diesen Grundkurven entsprechenden Ebenen fallen.*

π). Im Anschluss hieran lässt sich leicht der Grad der Regelfläche ableiten, deren Geraden t Grundkurventangenten sind mit je einem Berührungspunkt auf R_b, die also in die den berührten Grundkurven entsprechenden Ebenen fallen. Es handelt sich also um die Zahl dieser Grundkurventangenten, welche eine Gerade g treffen.

Wir wissen, dass die Berührungspunkte der Grundkurventangenten, welche g treffen, eine Fläche 4. Ordnung $F^4{}_g$

bilden. (Nr. 21aδ). Die Berührungspunkte der gesuchten Grundkurventangenten liegen auf R_b. Es kann sich also nur um die 60 Schnitte von R_b und $F^4{}_g$ handeln. Aber nicht alle kommen hier in Betracht.

Zu den 60 Punkten gehören die Grundpunkte P_i. Wir haben gezeigt, dass diese einfach auf $F^4{}_g$ (Nr. 21aζ) und doppelt auf R_b liegen (Nr. 21aν). Sie zählen also im ganzen für 16 Schnitte. Ferner sind die 18 gemeinsamen Punkte L von R_b mit C_K unter den 60 Punkten enthalten, da C_K auf $F^4{}_g$ liegt. (Nr. 21aδ).

Ist Q ein weiterer gemeinsamer Punkt, so hat in Q die einzige durch ihn hindurchgehende Grundkurve, die $R^4(Q)$, eine Tangente, welche g trifft, weil Q auf $F^4{}_g$ liegt; und weil Q der R_b angehört, so ist t eine Gerade der von uns betrachteten Regelfläche. Die Punkte Q führen also zu gesuchten Geraden t.

Für die andern gemeinsamen Punkte P_i und L gilt dies nicht. P_i ist Berührungspunkt auf doppelt unendlich vielen Grundkurventangenten, es sind dies alle Geraden des Bündels, dessen Scheitel P_i ist. ∞^1 viele unter diesen treffen g, die des Büschels um P_i in $\Pi_i \equiv (P_i g)$.

Ferner werden, da P_i doppelt liegt auf R_b, in P_i 2 Grundkurven von ihren entsprechenden Ebenen berührt, haben also in P_i Tangenten t, welche der betrachteten Regelfläche angehören. Aber diese beiden t liegen nicht im Büschel P_i in der Ebene π_i, treffen also nicht g.

Ebenso kommen die Punkte L nicht in Betracht.

L bestimmt eine R^4, die in L einen Doppelpunkt hat. Als Tangenten dieser R^4 in L haben wir die Geraden des Büschels L in $\mathfrak{S}_L$ anzusehen. Eine von ihnen, t, trifft g, die, welche nach dem Schnittpunkt von g mit $\mathfrak{S}_L$ geht. Aber diese Gerade t ist doch nicht von der Beschaffenheit wie die Geraden t, die wir suchen, und zu denen die Punkte Q führen. Denn jene Geraden liegen in den entsprechenden Ebenen der R^4, welche sie berühren. Die t in $\mathfrak{S}_L$ aber tut dies nicht; denn jede Ebene des Bündels L hat mit $R^4(L)$ in L 2 vereinigte Punkte gemeinsam, berührt also $R^4(L)$

in L. Die entsprechende Ebene der $R^4(L)$ ist eine bestimmte im Bündel L, sie fällt aber nicht mit $\mathfrak{S}_L$, der eigentlichen Tangentialebene der $R^4(L)$ in L, zusammen und schneidet diese in einer von t verschiedenen Geraden.

Es hat sich also gezeigt, dass die Geraden t, zu welchen die Punkte Q führen, die einzigen sind, welche für uns in Betracht kommen; die Zahl der Punkte Q ist also zugleich die Gradzahl der betrachteten Regelfläche. Sie hat, wie aus dem Vorangehenden hervorgeht, den Wert:

$$60—16—18 = 26.$$

Hiermit ist erwiesen:

Die Grundkurventangenten, welche je einen Berührungspunkt auf R_b *haben, also in die entsprechenden Ebenen der berührten Grundkurven fallen, bilden eine Regelfläche 26. Grades.* Diese enthält natürlich die R_b.

Wir können dieses Resultat durch spezielle Lage bestätigen, indem wir die Zahl der Geraden t aufsuchen, welche einen Bündelstrahl s treffen.

Durch S gehen 12 Erzeugende der Regelfläche, wie zunächst gezeigt werden soll.

ρ) Wir betrachten die durch einen festen Punkt Q gehenden Tangenten der R^4 einer gegebenen F^2, die wir wieder mit $\overline{F}^2$ bezeichnen wollen, eines Grundkurvenbüschels.

Die R^7, gebildet von den Berührungspunkten auf allen Grundkurventangenten durch Q (No. 21 a ϰ) trifft $\overline{F}^2$ in 14 Punkten, darunter in den Grundpunkten P_i. Ist P ein weiterer Schnittpunkt, so wird in ihm die $R^4(P)$ von einer Tangente t berührt, welche durch Q geht, weil P auf R^7 liegt; und weil P ferner auf $\overline{F}^2$ gelegen ist, so verläuft $R^4(P)$ auf $\overline{F}^2$. t ist also eine Gerade der verlangten Art. Die Punkte P_i führen nicht zu solchen Geraden. Denn es wird ja in jedem eine Grundkurve von einer durch P_i gehenden Tangente berührt, aber diese Grundkurve braucht nicht auf $\overline{F}_2$ zu liegen.

Da die gesuchten Geraden umgekehrt nur durch die Schnittpunkte der R^7 und $\overline{F}^2$ zustande kommen können, so

sehen wir, dass 6 Grundkurventangenten der verlangten Art durch Q und so durch jeden Punkt des Raumes gehen. 6 ist also die Ordnung der Kongruenz, welche von den Tangenten der Grundkurven eines gegebenen Büschels gebildet wird. Dass diese Kongruenz 6. Ordnung ist, bestätigt uns eine andere Ueberlegung, die uns gleichzeitig zeigt, dass auch ihre Klasse 6 ist.

Sie ist nämlich die Schnittkongruenz des Komplexes 3. Grades aller Grundkurventangenten und des Komplexes 2. Grades der Tangenten der Trägerfläche $\overline{F}^2$.

Jede gemeinsame Gerade g dieser beiden Komplexe muss als Gerade des ersten von ihnen auf einer Fläche des Netzes, F'^2, liegen; weil sie dem zweiten Komplex angehört, so berührt sie die $\overline{F}^2$. Die Schnittkurve der F'^2 und $\overline{F}^2$ geht dann durch die beiden unendlich nahen Punkte, welche $\overline{F}^2$ mit g gemeinsam hat, berührt also g. Umgekehrt muss jede Gerade, welche eine R^4 von F^2 berührt, den beiden erwähnten Komplexen gemeinsam sein.

Hiermit ist erkannt:

Die Kongruenz der Tangenten, welche die Grundkurven eines gegebenen Büschels berühren, ist eine Kongruenz (6, 6). Sie ist der Durchschnitt des Komplexes 3. Grades sämtlicher Grundkurventangenten und des Komplexes 2. Grades der Tangenten der gegebenen Fläche.

Die Ordnung dieser Kongruenz belehrt uns über die Klasse des Kegels in S, eingehüllt von den Ebenen, deren entsprechende R^4 je eine durch S gehende Tangente haben.

Da einem Ebenenbüschel ein Grundkurvenbüschel entspricht, und es in einem solchen 6 Grundkurven gibt, die eine Tangente durch S senden, so sind in jedem Ebenenbüschel 6 solche Ebenen vorhanden, d. h.:

Der Kegel der Ebenen, deren entsprechende R^4 *je eine durch* S *gehende Tangente haben, ist 6. Klasse:* K_6.

Zwischen seinen Ebenen und den Kanten des Komplexkegels aller Grundkurventangenten aus S besteht eine Korrespondenz [2, 1], in der jeder Ebene des K_6 die Tangente,

welche die entsprechende R^4 nach S sendet, zugeordnet ist, jeder Kante des K^3 aber die beiden Ebenen, welche den beiden von ihr berührten R^4 entsprechen.

Nach dem in 16b zitierten Satze gibt es 12 Paare incidenter entsprechender Elemente.

Ist τ, t ein solches, so berührt R^4_τ die t, also, da t in τ liegt, auch τ.t ist daher eine Gerade der betrachteten Regelfläche. Da nun deren Erzeugende durch S nur so zustande kommen, so ist erwiesen, *dass* S *12 Erzeugende unserer Regelfläche entsendet.*

Der Bündelstrahl s wird also in S von 12 Erzeugenden getroffen, ausserdem von den 14 Grundkurventangenten, welche in den Berührungspunkten der 14 Tangentialebenen des K_{14} durch s mit ihren entsprechenden R^4 an diese gelegt sind. So kommen die 26 Erzeugenden zustande, welche s treffen.

b) R_b *ist der eine Bestandteil der Kurve* R^{84}, in deren Punkten sich die Ebenen, welche ihre entsprechenden R^4 berühren, mit diesen treffen. Da R_b doppelt zählt als Bestandteil der R^{84}, so *ist der restierende Teil eine* R^{54}.

Beide Bestandteile enthalten die Grundpunkte P_i *des Netzes*, und zwar, da R^{84} es 14fach tut, R_b 2fach, *so liegen sie auf* R^{54} *10fach.*

Jedenfalls durchkreuzen sich R_b und R^{54} in den Punkten P_i. Es fragt sich, ob dies die einzigen, gemeinsamen Punkte sind.

Solche weiteren gemeinsamen Punkte können auf zweierlei Weise zustande kommen.

Wenn eine Ebene des Bündels ihre entsprechende Grundkurve doppelt berührt, etwa in den Punkten U und V, so ist, weil U Berührungspunkt der $R^4(U)$ mit ihrer zugeordneten Ebene ist, V weiterer Schnittpunkt dieser beiden Elemente, liegt also auf R^{24}, als Berührungspunkt der beiden aber auf R_b. Ebenso erkennen wir, wenn wir von V ausgehen, dass U auf den beiden Kurven liegt. Solche Punkte U und V sind also Schnittpunkte von R_b und R^{54}, und

zwar führt jede Ebene, welche ihre entsprechende Grundkurve doppelt berührt, zu zweien.

Da es in S 16 Ebenen gibt, welche ihre entsprechenden Grundkurven doppelt berühren (Nr. 16b), so kommen auf diese Weise 32 Schnitte von R_b und R^{54} zustande.

Endlich muss noch jeder Osculationspunkt O einer R^4 von N mit ihrer zugeordneten Ebene beiden Kurven gemeinsam sein. Denn als Berührungspunkt der beiden Elemente liegt er auf R_b, als weiterer Schnittpunkt auf R^{54}. Genau ebenso wie in (Nr. 16a ζ) für die Kurven R^8 und R^{24} können wir nun hier schliessen, dass R_b und R^{54} sich in jedem Punkte O berühren. Da es 39 mal vorkommt, dass eine R^4 von ihrer zugeordneten Ebene osculiert wird, so haben wir 39 Berührungspunkte dieser Art der R_b und R^{54}.

Weitere gemeinsame Punkte können nicht vorhanden sein. Denn ist umgekehrt Q ein solcher gemeinsamer Punkt, der nicht in einen der Grundpunkte fällt, so wird, weil Q auf R_b liegt, die einzige durch ihn bestimmte R^4, die $R^4(Q)$, in Q von ihrer zugeordneten Ebene berührt, weil Q auf R^{54} liegt, so muss er weiterer gemeinsamer Punkt einer R^4 von N mit ihrer entsprechenden Ebene sein, wenn diese Elemente einander berühren. Da Q aber nur eine Grundkurve bestimmt, so kann es sich wiederum nur um $R^4(Q)$ und die entsprechende Ebene handeln.

Q könnte also nur ein Punkt von der Art der U und V oder O sein.

Hieraus folgt, *dass die Kurven* R_b *und* R^{54} *einander* $(8(10.2)+32)$ *mal* $= 192$ *mal durchschneiden und ausserdem 39 mal berühren.*

c). Wir wissen, dass jede von den 27 Geraden der F^3 die R^{84} in 28 Punkten trifft (Nr. 20b). Da ist es von Interesse, wieviele von diesen 28 Punkten auf die R_b, wieviele auf die R^{54} kommen.

Um dies zu erkennen, greifen wir eine Gerade g der F^3 heraus. Jeder Punkt P auf ihr ist Schnittpunkt der durch ihn bestimmten Grundkurve mit der entsprechenden Bündelebene. Es fragt sich, für wieviele Punkte P auf g die $R^4(P)$

von ihrer entsprechenden Ebene berührt wird, oder, was dasselbe ist, die entsprechende Ebene ξ mit der Bündelebene η, welche $R^4(P)$ in P berührt, zusammenfällt.

Für einen beliebigen Punkt P auf g sind ξ und η von einander verschieden. Die Ebenen ξ umhüllen als Ebenen, deren entsprechende R^4 eine Gerade g treffen, einen Kegel 2. Klasse (Nr. 6). Die η projizieren aus S die Tangenten an die Kurven $R^4(P)$ mit den Berührungspunkten P, wo P die sämtlichen Lagen auf g hat. Diese Tangenten bilden eine Regelfläche 4. Grades (Nr. 21 a ε), die Ebenen η umhüllen daher einen Kegel 4. Klasse, den Tangentialkegel aus S an diese Regelfläche.

Die einhüllenden Ebenen der beiden Kegel 2. und 4. Klasse sind einander eineindeutig zugeordnet, und zwar in folgender Weise:

Ist ξ Tangentialebene des ersten Kegels, so trifft ihre entsprechende R^4 die g, etwa in P. Uebrigens gehört P, weil er auf g, also auf F^3 liegt, der ξ an, ist also deren Schnittpunkt mit g. Die Ebene, welche S mit der Tangente an $R^4(P)$ in P verbindet, ist dann die der ξ zugeordnete η.

Gehen wir von einer η aus, so projiciert diese ja die Tangente an eine R^4, welche g trifft, in diesem Treffpunkte. Es sei dies etwa P. Die Ebene ξ, welche der $R^4(P')$ entspricht, ist dann der η zugeordnet. Sie geht natürlich durch P, weil P als Punkt von g der F^3 angehört.

Also zugeordnete Ebenen ξ und η treffen g im selben Punkte P, schneiden sich mithin in SP, so dass die Schnittgeraden entsprechender Ebenen der beiden Kegel die Ebene erfüllen, welche S mit g verbindet. Nun erzeugen bekanntlich zwei Kegel mit gemeinsamer Spitze, deren Tangentialebenen einander eineindeutig zugeordnet sind, durch die Schnittgeraden entsprechender Ebenen eine Regelfläche, deren Gradzahl die Summe der beiden Klassenzahlen der gegebenen Kegel ist. (Sturm, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften I Nr. 177). In unserem Falle müsste also eine $\Re^6$ entstehen. Da aber, wie wir gesehen haben, das

eigentliche Erzeugnis die Ebene (Sg) ist, so muss es 5 mal vorkommen, dass entsprechende Ebenen ξ und η zusammen fallen. Eine solche Ebene $\xi \equiv \eta$ berührt ihre entsprechende R^4 auf g.

Die Gerade g und so *jede der 27 Geraden auf* F^3 *hat also 5 Punkte mit* R_b *gemeinsam*; diese zählen für 10 von den 28 Schnittpunkten mit R^{84}, weil R_b doppelt zu rechnen ist als Bestandteil der R^{84}, *so dass 18 Schnittpunkte mit* R^5-*vorhanden sind.*

Da ein Kegelschnitt der F^3 zur vollen Schnittkurve 3. Ordnung seiner Ebene mit F^3, einer C^3, durch eine Gerade vervollständigt wird, und eine solche C^3 die R_b in 15 Punkten trifft, die R^{54} in 54 Punkten, den 15 bezw. 54 gemeinsamen Punkten ihrer Ebene mit R_b und R^{54}, da ferner, wie eben gezeigt ist, die Gerade mit den beiden Kurven 5 bezw. 18 Punkte gemeinsam hat, so kommen auf jeden Kegelschnitt 10 bezw. 36 Schnitte je mit den beiden Kurven.

d). Es liegt daher die Vermutung nahe, dass R_b in F^3 durch eine F^5, R^{54} durch eine F^{18} eingeschnitten wird. Die Schnitte von F^5 mit einer Geraden bezw. einem Kegelschnitt von F^3 wären dann die gemeinsamen Punkte dieser Elemente der F^3 mit R_b, und ähnliches müsste für F^{18} gelten.

Dass R_b Schnitt der F^3 mit einer F^5 ist, wird noch wahrscheinlicher durch folgende Betrachtung, die ich einer Mitteilung von Herrn Geheimrat Sturm verdanke:

In jeder Ebene σ des Bündels S haben wir die 3 Diagonalpunkte des vollständigen Vierecks der Schnitte mit der entsprechenden Grundkurve R^4. Diese erzeugen eine Fläche 7. Ordnung.

Wir lassen P auf der Geraden g sich bewegen, erhalten jedesmal den Ebenenbüschel um $SP \equiv p$ und den korrespondierenden R^4-Büschel auf der F^2_p; wir denken ihn je eingeschnitten durch den Büschel von N, dessen Grundkurve $R^4(P)$ durch P geht; und je die beiden Geraden durch P auf der einschneidenden Fläche sind die Doppelsekanten aus P an die eingeschnittene Kurve R^4. Die verbindende Ebene dreht sich um die Tangente t_p von $R^4(P)$ in P, und die

beiden Doppelsekanten erfüllen den Komplexkegel 3. Ordnung aus P. Jene Ebene soll die der eingeschnittenen R^4 entsprechende Ebene von S sein, aber auch durch S gehen. Wir verbinden daher t_P mit S und fassen diejenige Fläche aus dem Büschel $R^4(P)$ ins Auge, welche die in der Ebene (St_P) gelegenen Doppelsekanten enthält, und ihren entsprechenden Strahl von S.

Die t_P erzeugen eine Regelfläche 4. Grades, also umhüllen die Ebenen (St_P) einen Kegel 4. Klasse.

Wenn s einen Büschel in S beschreibt, und die entsprechende F^2 dann ebenfalls, so entsteht durch die Tangentialebenen dieser F^2 in den Schnitten mit g ein Torsus 3. Klasse, weil die Berührungspunkte der von einem Punkte an die Flächen eines F^2-Büschels kommenden Tangentialebenen eine Fläche 3. Ordnung beschreiben (Flächen 3. Ordnung Nr. 9); also gehen 3 von jenen Ebenen durch S, und wir erhalten im Bündel S einen Kegel 3. Ordnung von Strahlen s, deren entsprechende F^2 in einem der Schnitte mit g eine durch S gehende Berührungsebene haben.

Die Kanten dieses Kegels und die Berührungsebenen des obigen Kegels 4. Klasse stehen in eineindeutiger Beziehung: jede Kante des ersteren bestimmt eine Fläche F^2 aus N, deren einer Schnitt P mit g eine durch S gehende Berührungsebene hat; auf der liegt die durch P gehende $R^4(P)$, und deren Tangente t_P in P in der Berührungsebene; also ist diese eine Tangentialebene des zweiten Kegels. Umgekehrt: eine Tangentialebene dieses Kegels enthält die t_P des Punktes P, in dem sie g trifft, und berührt eine Fläche des Büschels $R^4(P)$ in P; der entsprechende Strahl s gehört dem ersten Kegel an. Wir haben 7 Inzidenzen entsprechender Elemente. Wenn nun eine Ebene von S eine Fläche von N in P auf g berührt und den dieser entsprechenden Strahl s enthält, so sind die beiden durch P gehenden und in der Ebene enthaltenen Geraden dieser Fläche die von P kommenden Doppelsekanten der auf F^2 gelegenen R^4, welche jener Ebene entspricht. P gehört der von uns behandelten Fläche an. Sie hat auf g 7 Punkte.

Wenn eine Ebene von S ihre entsprechende R^4 berührt, so fallen in den Berührungspunkt 2 von den 3 Diagonalpunkten. Also liegt R_b auf dieser Fläche 7. Ordnung.

Der Restschnitt 6. Ordnung ergibt sich folgendermassen:

Liegt der Schnittpunkt D zweier Doppelsekanten d, d_1 einer R^4 in der zugeordneten Ebene ξ von S auf der F^3, ohne mit einem der Punkte (ξ, R^4) (und dann mit zweien) sich zu vereinigen, so muss die Fläche F^2 durch R^4, welche durch dies Geradenpaar geht, einen entsprechenden Strahl s in ξ haben, der durch D geht. Er berührt also diese Fläche und damit die F^3, und D kommt auf den Schnitt der ersten Polare von S mit F^3. Diese Kurve 6. Ordnung ist der Restschnitt.

Sie hat in S einen Doppelpunkt, die Kurve 15. Ordnung hat 8 Doppelpunkte in den Grundpunkten. Beide Kurven haben 30 Begegnungspunkte in den Schnitten der R_b mit der die zweite Kurve einschneidenden ersten Polare.

Nun ist der Rang der vollen Schnittkurve zweier Flächen m^{ter} und n^{ter} Ordnung: $mn\,(m + n-2)$ (Cremona, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen No. 117; Salmon-Fiedler, Raumgeometrie 3. Aufl. Bd. II No. 105), also in unserem Falle 3.7.8. Er wird durch jeden Doppelpunkt um 2 verringert. Folglich gilt, wenn r, r_1 die Rangzahlen der beiden Bestandteile sind:

$$r + r_1 = 3 \cdot 7 \cdot 8 - 2z_i,$$

wo z die Zahl der Doppelpunkte der Gesamtkurve ist, also $1 + 8 + 30$,:

$$r + r_1 = 3 \cdot 7 \cdot 8 - 2(1 + 8 + 30) = 90.$$

Der Rang r unserer Kurve 6. Ordnung ohne Doppelpunkt ist 18 (Synthetische Untersuchungen über Flächen 3. Ordnung Nr. 62), mit einem Doppelpunkt 16, daher ist $r_1 = 90 - 16 = 74$.

Andererseits ist der Rang einer vollen Schnittkurve (F^3, F^5) gleich $3 \cdot 5 \cdot 6 = 90$, und wenn sie 8 Doppelpunkte hat, $90 - 2 \cdot 8 = 74$.

Damit ist noch mehr wahrscheinlich gemacht, dass R_b eine solche volle Schnittkurve ist.

Lebenslauf.

Ich, Nelly Neumann, jüdischer Religion, bin geboren am 3. Januar 1886 zu Breslau als Tochter des Justizrats Max Neumann hier und seiner schon seit meiner Kindheit verstorbenen Ehefrau Sophie geb. Deutsch. Nach neunjährigem Besuch der höheren Töchterschule des Fräuleins Anna Malberg hier — Ostern 1892 bis Ostern 1901 — machte ich die städtischen Gymnasialkurse für Mädchen durch und legte Ostern 1905 am König-Wilhelms-Gymnasium hier die Reifeprüfung ab.

Hierauf widmete ich mich dem Studium der Mathematik und Naturwissenschaften an der Universität Breslau. Während des Sommer-Semesters 1907 studierte ich an der Universität und am Polytechnikum in Zürich.

Ich nahm teil an den Vorlesungen und Uebungen der Herren Professoren und Dozenten:

Abegg, Baumgartner, Franz, Freudenthal, Herz, Hintze, Hönigswald, Kneser, Kühnemann, Ladenburg, Landsberg, Lummer, Pringsheim, Rosanes, Schäfer, Sturm, Waetzmann in Breslau, Hirsch, Hurwitz, Martin, Schumann, Störring in Zürich.

Allen diesen meinen verehrten Lehrern sage ich Dank für die Anleitung, die sie meinen Studien zuteil werden liessen, besonders aber Herrn Geheimrat Sturm für die Anregung zu der vorliegenden Arbeit und das freundliche Interesse, das er derselben entgegenbrachte.